Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

28 de diciembre de 2015

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

1. Recordatorios
   - Subobjetos
   - Lema de Yoneda y Functores Representables

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

1. Recordatorios
   - Subobjetos
   - Lema de Yoneda y Functores Representables
2. Topos
   - Objetos Potencia

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

1. Recordatorios
   - Subobjetos
   - Lema de Yoneda y Functores Representables
2. Topos
   - Objetos Potencia
3. Categoría de Functores como un Topos
   - Functor Evaluación
   - Functores de Opuesta en Set

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

1. Recordatorios
   - Subobjetos
   - Lema de Yoneda y Functores Representables
2. Topos
   - Objetos Potencia
3. Categoría de Functores como un Topos
   - Functor Evaluación
   - Functores de Opuesta en Set
4. Haces y Gavillas
   - Haces
   - Gavillas de gérmenes
   - Pregavillas (functores)
   - Gavillas (functores)

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Sección 1
Recordatorios

Recordatorios

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Diagrama)

Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{J}$ (llamadas categorías índices), un diagrama de tipo $\mathcal{J}$ en la categoría $\mathcal{C}$ es un functor (covariante) $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$.

Recordatorios

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Diagrama)

Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{J}$ (llamadas categorías índices), un diagrama de tipo $\mathcal{J}$ en la categoría $\mathcal{C}$ es un functor (covariante) $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$.

Cono

Toposes y algunas propiedades

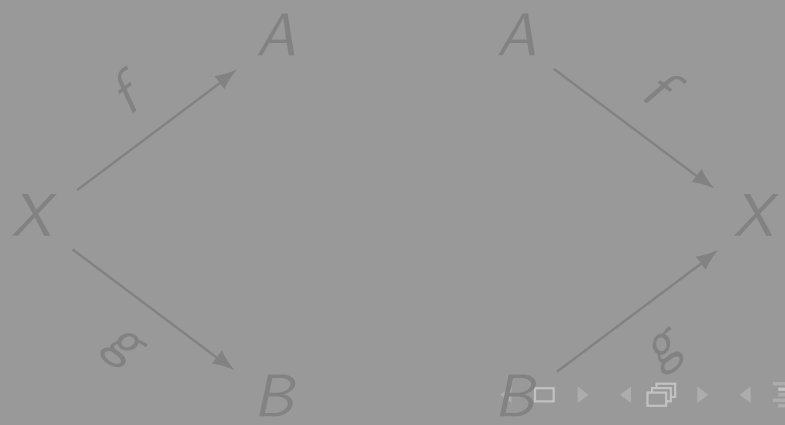
Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Cono y cocono)

Para un par de objetos A y B en una categoría $\mathcal{C}$:

- Una cuña a ambos (cono) es un objeto con un par de morfismos $\langle X, f, g\rangle$ tales que $f \in \mathrm{Hom}(X, A)$ y $g \in \mathrm{Hom}(X, B)$.
- Una cuña desde ambos (cocono) es un objeto con un par de morfismos $\langle X, f, g\rangle$ tales que $f \in \mathrm{Hom}(A, X)$ y $g \in \mathrm{Hom}(B, X)$.



Cono

Toposes y algunas propiedades

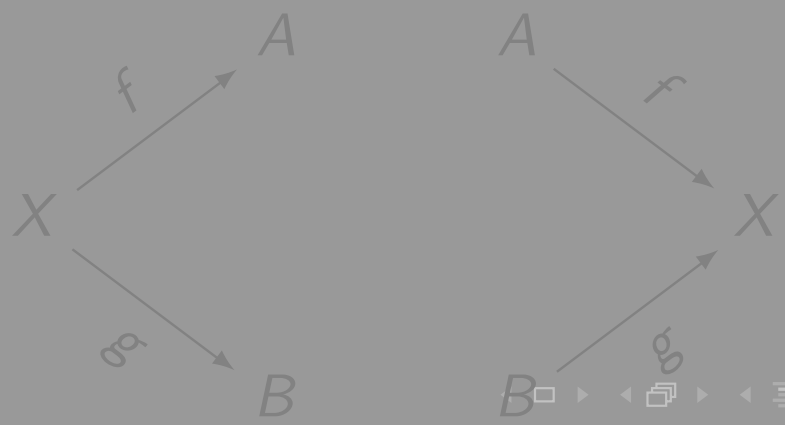
Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Cono y cocono)

Para un par de objetos A y B en una categoría $\mathcal{C}$:

- Una cuña a ambos (cono) es un objeto con un par de morfismos $\langle X, f, g\rangle$ tales que $f \in \mathrm{Hom}(X, A)$ y $g \in \mathrm{Hom}(X, B)$.
- Una cuña desde ambos (cocono) es un objeto con un par de morfismos $\langle X, f, g\rangle$ tales que $f \in \mathrm{Hom}(A, X)$ y $g \in \mathrm{Hom}(B, X)$.



Cono

Toposes y algunas propiedades

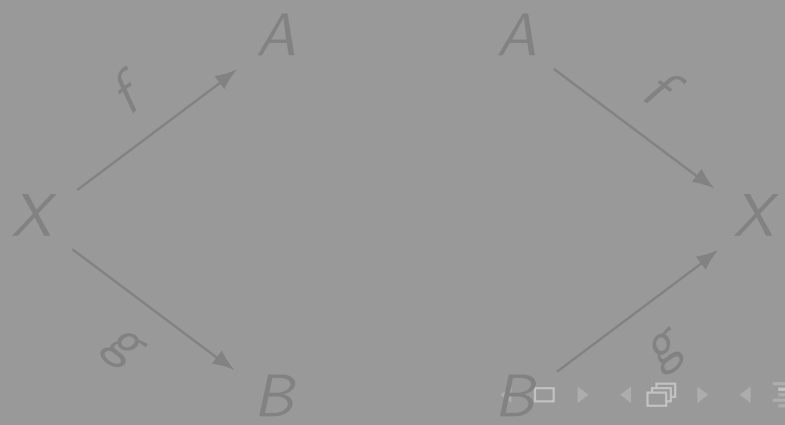
Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Cono y cocono)

Para un par de objetos A y B en una categoría $\mathcal{C}$:

- Una cuña a ambos (cono) es un objeto con un par de morfismos $\langle X, f, g\rangle$ tales que $f \in \mathrm{Hom}(X, A)$ y $g \in \mathrm{Hom}(X, B)$.
- Una cuña desde ambos (cocono) es un objeto con un par de morfismos $\langle X, f, g\rangle$ tales que $f \in \mathrm{Hom}(A, X)$ y $g \in \mathrm{Hom}(B, X)$.



Cono

Toposes y algunas propiedades

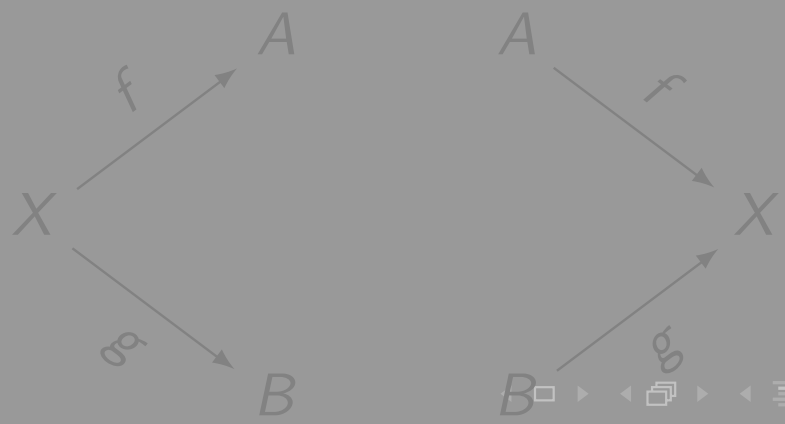
Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Cono y cocono)

Para un par de objetos A y B en una categoría $\mathcal{C}$:

- Una cuña a ambos (cono) es un objeto con un par de morfismos $\langle X, f, g\rangle$ tales que $f \in \mathrm{Hom}(X, A)$ y $g \in \mathrm{Hom}(X, B)$.
- Una cuña desde ambos (cocono) es un objeto con un par de morfismos $\langle X, f, g\rangle$ tales que $f \in \mathrm{Hom}(A, X)$ y $g \in \mathrm{Hom}(B, X)$.



Cono

Toposes y algunas propiedades

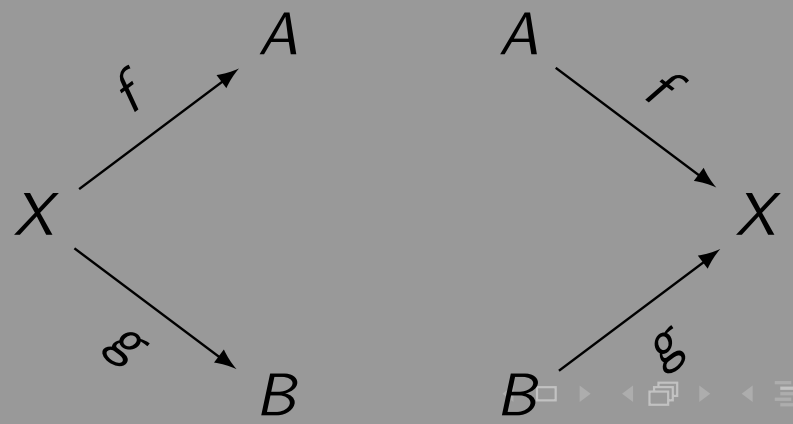
Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Cono y cocono)

Para un par de objetos A y B en una categoría $\mathcal{C}$:

- Una cuña a ambos (cono) es un objeto con un par de morfismos $\langle X, f, g\rangle$ tales que $f \in \mathrm{Hom}(X, A)$ y $g \in \mathrm{Hom}(X, B)$.
- Una cuña desde ambos (cocono) es un objeto con un par de morfismos $\langle X, f, g\rangle$ tales que $f \in \mathrm{Hom}(A, X)$ y $g \in \mathrm{Hom}(B, X)$.



Cono

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Cono -generalización-)

Cono

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Cono -generalización-)

Para $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un diagrama en la categoría $\mathcal{C}$, un cono a F es un objeto, $N \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, con una familia de morfismos indizados por los objetos de $\mathcal{J}$, $\{\psi_X \in \text{Hom}(N, F(X)) \mid X \in \text{Obj}(\mathcal{J})\}$, tal que para cada morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{J}}(X, Y)$ el diagrama:

Cono

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

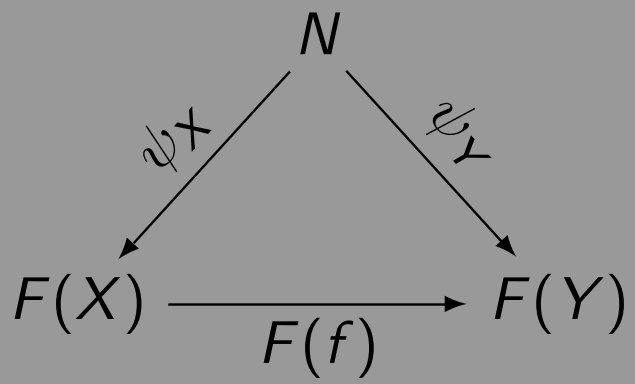
Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Cono -generalización-)

Para $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un diagrama en la categoría $\mathcal{C}$, un cono a F es un objeto, $N \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, con una familia de morfismos indizados por los objetos de $\mathcal{J}$, $\{\psi_X \in \text{Hom}(N, F(X)) \mid X \in \text{Obj}(\mathcal{J})\}$, tal que para cada morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{J}}(X, Y)$ el diagrama:

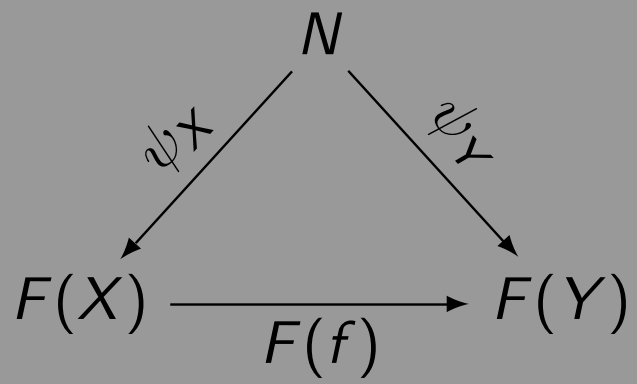


Cono

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Cono -generalización-)

Para $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un diagrama en la categoría $\mathcal{C}$, un cono a F es un objeto, $N \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, con una familia de morfismos indizados por los objetos de $\mathcal{J}$, $\{\psi_X \in \text{Hom}(N, F(X)) \mid X \in \text{Obj}(\mathcal{J})\}$, tal que para cada morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{J}}(X, Y)$ el diagrama:



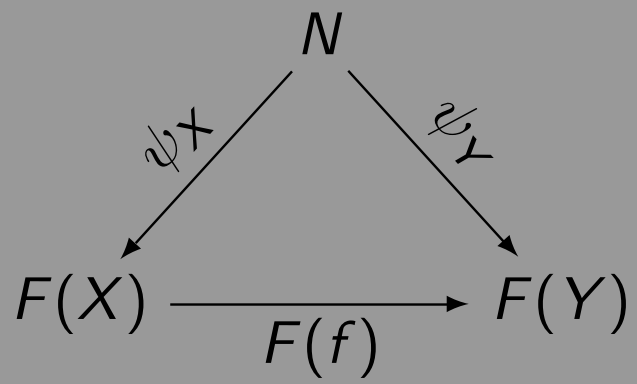
conmuta, es decir, $F(f) \circ \psi_X = \psi_Y$. También se suele decir que este es un cono con vértice N y base F.

Cono

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Cono -generalización-)

Para $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un diagrama en la categoría $\mathcal{C}$, un cono a F es un objeto, $N \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, con una familia de morfismos indizados por los objetos de $\mathcal{J}$, $\{\psi_X \in \text{Hom}(N, F(X)) \mid X \in \text{Obj}(\mathcal{J})\}$, tal que para cada morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{J}}(X, Y)$ el diagrama:



conmuta, es decir, $F(f) \circ \psi_X = \psi_Y$. También se suele decir que este es un cono con vértice N y base F.

La definición de cocono es dual a la recientemente dada.

Límites

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Límite)

Límites

Definición (Límite)

Decimos que un límite del diagrama $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ es un cono $\langle L, \varphi_X \rangle$ a F tal que para cada otro cono $\langle N, \psi_X \rangle$ a F existe un único morfismo mediador $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, L)$ tal que para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{J})$ se cumple que $\varphi_X \circ m = \psi_X$.

Límites

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Límite)

Decimos que un límite del diagrama $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ es un cono $\langle L, \varphi_X \rangle$ a F tal que para cada otro cono $\langle N, \psi_X \rangle$ a F existe un único morfismo mediador $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, L)$ tal que para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{J})$ se cumple que $\varphi_X \circ m = \psi_X$.
La definición de colímite es dual a la recientemente dada.

Límites

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

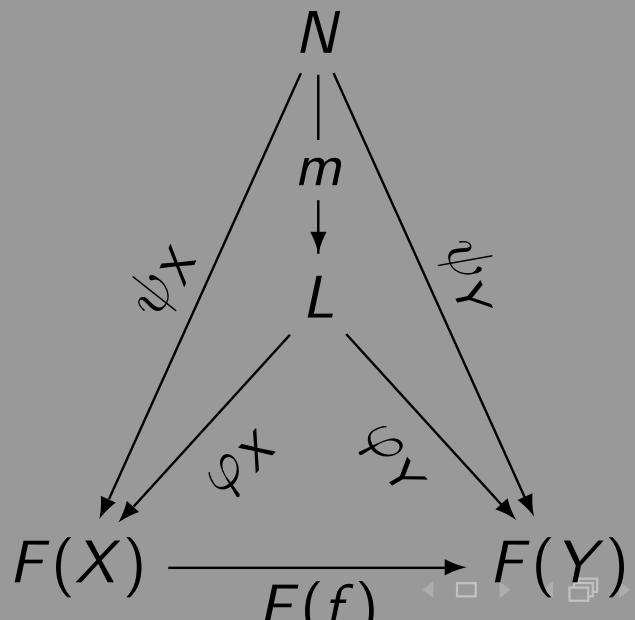
Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Límite)

Decimos que un límite del diagrama $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ es un cono $\langle L, \varphi_X \rangle$ a F tal que para cada otro cono $\langle N, \psi_X \rangle$ a F existe un único morfismo mediador $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, L)$ tal que para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{J})$ se cumple que $\varphi_X \circ m = \psi_X$.
La definición de colímite es dual a la recientemente dada.



Límites

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Presentamos a continuación una serie de límites y colímites especiales:

Definición (Objetos inicial y terminal)

Dada una categoría $\mathcal{C}$ decimos que:

- $0 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ es inicial si dado cualquier otro objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $\emptyset \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, A)$.
- $1 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ es final si dado cualquier otro objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $! \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, 1)$.

$$A \xleftarrow[\emptyset]{} 0 \qquad A \xrightarrow[!]{} 1$$

Límites

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Presentamos a continuación una serie de límites y colímites especiales:

Definición (Objetos inicial y terminal)

Dada una categoría $\mathcal{C}$ decimos que:

- $0 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ es inicial si dado cualquier otro objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $\emptyset \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, A)$.
- $1 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ es final si dado cualquier otro objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $! \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, 1)$.

$$A \xleftarrow[\emptyset]{} 0 \qquad A \xrightarrow[!]{} 1$$

Límites

Presentamos a continuación una serie de límites y colímites especiales:

Definición (Objetos inicial y terminal)

Dada una categoría $\mathcal{C}$ decimos que:

- $0 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ es inicial si dado cualquier otro objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $\emptyset \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, A)$.
- $1 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ es final si dado cualquier otro objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $! \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, 1)$.

$$A \xleftarrow[\emptyset]{} 0 \qquad A \xrightarrow[!]{} 1$$

Límites

Presentamos a continuación una serie de límites y colímites especiales:

Definición (Objetos inicial y terminal)

Dada una categoría $\mathcal{C}$ decimos que:

- $0 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ es inicial si dado cualquier otro objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $\emptyset \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, A)$.
- $1 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ es final si dado cualquier otro objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $! \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, 1)$.

$$A \xleftarrow[\emptyset]{} 0 \qquad A \xrightarrow[!]{} 1$$

Límites

Presentamos a continuación una serie de límites y colímites especiales:

Definición (Objetos inicial y terminal)

Dada una categoría $\mathcal{C}$ decimos que:

- $0 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ es inicial si dado cualquier otro objeto $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $\emptyset \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, A)$.
- $1 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ es final si dado cualquier otro objeto $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $! \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, 1)$.

$$A \xleftarrow[\emptyset]{} 0 \qquad A \xrightarrow[!]{} 1$$

Límites

Presentamos a continuación una serie de límites y colímites especiales:

Definición (Objetos inicial y terminal)

Dada una categoría $\mathcal{C}$ decimos que:

- $0 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ es inicial si dado cualquier otro objeto $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $\emptyset \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, A)$.
- $1 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ es final si dado cualquier otro objeto $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $! \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, 1)$.

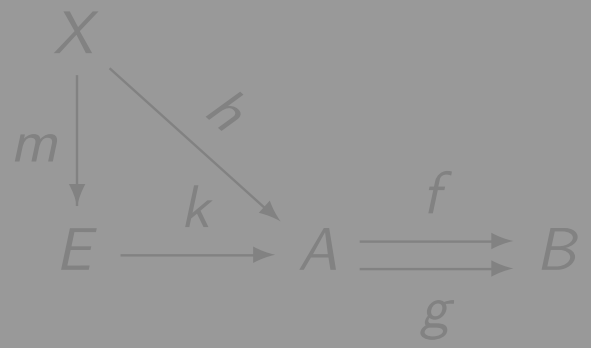
$$A \xleftarrow[\emptyset]{} 0 \qquad A \xrightarrow[!]{} 1$$

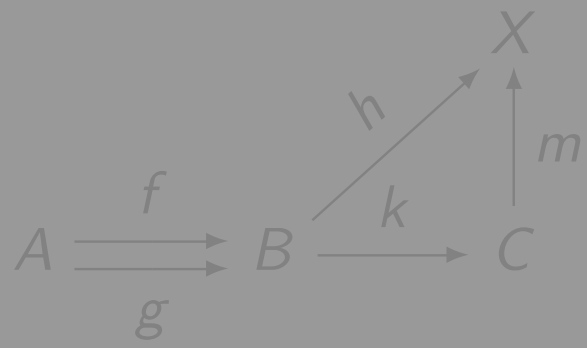
Límites

Definición (Igualador y coigualador)

Un igualador para un par de morfismos $f, g \in \mathrm{Hom}(A, B)$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un morfismo $k \in \mathrm{Hom}(E, A)$ que hace iguales a f y a g ($f \circ k = g \circ k$) y que dado cualquier otro morfismo que los hace iguales $h \in \mathrm{Hom}(X, A)$ podemos hallar un mediador $m \in \mathrm{Hom}(X, E)$ tal que $h = k \circ m$.

La definición de coigualador es dual a la recientemente dada.



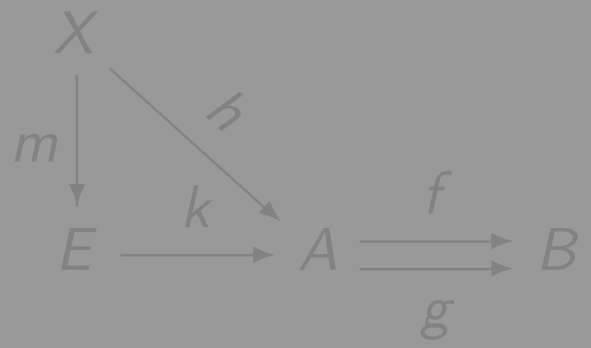


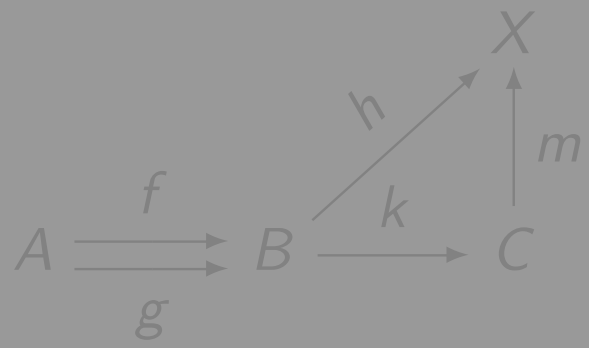
Límites

Definición (Igualador y coigualador)

Un igualador para un par de morfismos $f, g \in \mathrm{Hom}(A, B)$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un morfismo $k \in \mathrm{Hom}(E, A)$ que hace iguales a f y a g ($f \circ k = g \circ k$) y que dado cualquier otro morfismo que los hace iguales $h \in \mathrm{Hom}(X, A)$ podemos hallar un mediador $m \in \mathrm{Hom}(X, E)$ tal que $h = k \circ m$.

La definición de coigualador es dual a la recientemente dada.



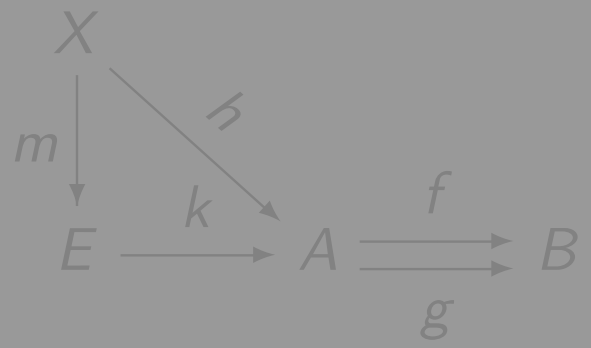


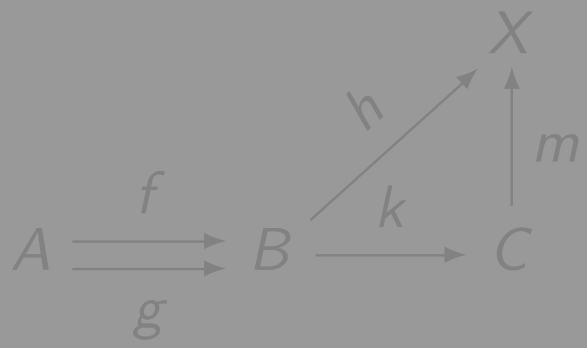
Límites

Definición (Igualador y coigualador)

Un igualador para un par de morfismos $f, g \in \mathrm{Hom}(A, B)$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un morfismo $k \in \mathrm{Hom}(E, A)$ que hace iguales a f y a g ($f \circ k = g \circ k$) y que dado cualquier otro morfismo que los hace iguales $h \in \mathrm{Hom}(X, A)$ podemos hallar un mediador $m \in \mathrm{Hom}(X, E)$ tal que $h = k \circ m$.

La definición de coigualador es dual a la recientemente dada.





Límites

Toposes y algunas propiedades

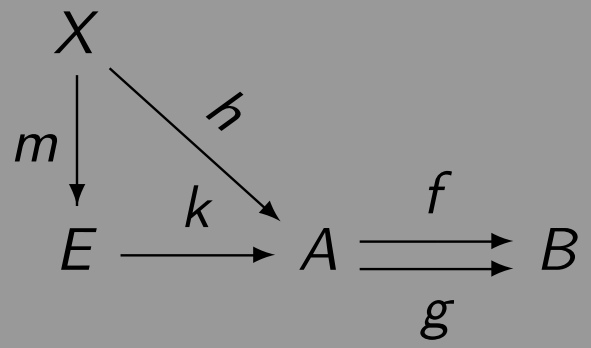
Jonathan Julián Huerta y Munive

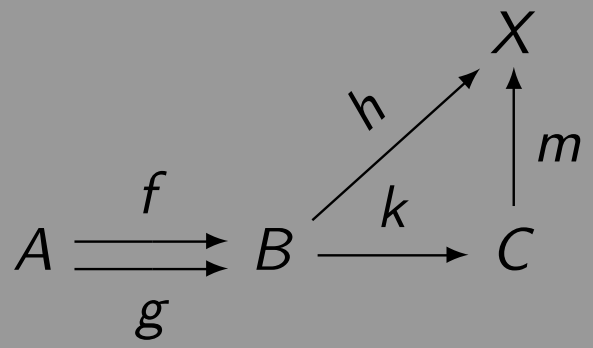
Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Igualador y coigualador)

Un igualador para un par de morfismos $f, g \in \mathrm{Hom}(A, B)$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un morfismo $k \in \mathrm{Hom}(E, A)$ que hace iguales a f y a g ($f \circ k = g \circ k$) y que dado cualquier otro morfismo que los hace iguales $h \in \mathrm{Hom}(X, A)$ podemos hallar un mediador $m \in \mathrm{Hom}(X, E)$ tal que $h = k \circ m$.

La definición de coigualador es dual a la recientemente dada.





Subobjetos

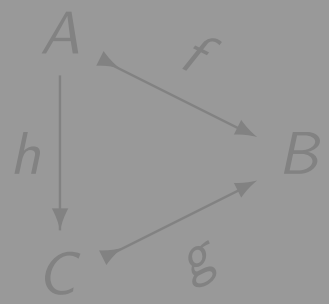
Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Subobjeto)

Dados A, B, $\mathcal{C}$-objetos y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, escribiremos $(A, f) \subseteq_{\mathcal{C}} B$ si y sólo si f es monomorfismo, i.e. $f : A \rightarrowtail_{\mathcal{C}} B$.

Definición (Orden de Subobjetos)

Para $(A, f), (C, g) \subseteq_{\mathcal{C}} B$, escribiremos $(A, f) \leq (C, g)$ si existe $h : A \to_{\mathcal{C}} C$ que hace conmutar el diagrama:



i.e. $g \circ h = f$.

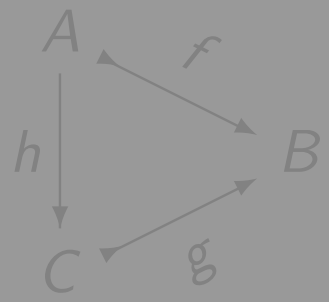
Subobjetos

Definición (Subobjeto)

Dados A, B, $\mathcal{C}$-objetos y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, escribiremos $(A, f) \subseteq_{\mathcal{C}} B$ si y sólo si f es monomorfismo, i.e. $f : A \rightarrowtail_{\mathcal{C}} B$.

Definición (Orden de Subobjetos)

Para $(A, f), (C, g) \subseteq_{\mathcal{C}} B$, escribiremos $(A, f) \leq (C, g)$ si existe $h : A \to_{\mathcal{C}} C$ que hace conmutar el diagrama:



i.e. $g \circ h = f$.

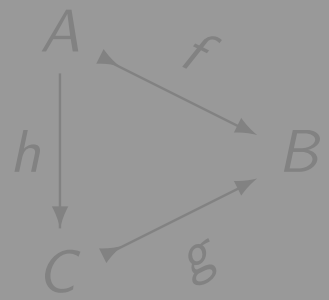
Subobjetos

Definición (Subobjeto)

Dados A, B, $\mathcal{C}$-objetos y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, escribiremos $(A, f) \subseteq_{\mathcal{C}} B$ si y sólo si f es monomorfismo, i.e. $f : A \rightarrowtail_{\mathcal{C}} B$.

Definición (Orden de Subobjetos)

Para $(A, f), (C, g) \subseteq_{\mathcal{C}} B$, escribiremos $(A, f) \leq (C, g)$ si existe $h : A \to_{\mathcal{C}} C$ que hace conmutar el diagrama:



i.e. $g \circ h = f$.

Subobjetos

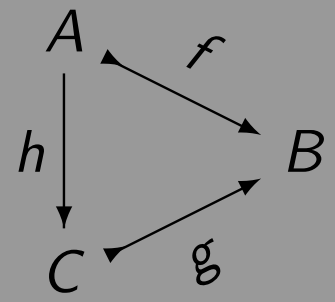
Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Subobjeto)

Dados A, B, $\mathcal{C}$-objetos y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, escribiremos $(A, f) \subseteq_{\mathcal{C}} B$ si y sólo si f es monomorfismo, i.e. $f : A \rightarrowtail_{\mathcal{C}} B$.

Definición (Orden de Subobjetos)

Para $(A, f), (C, g) \subseteq_{\mathcal{C}} B$, escribiremos $(A, f) \leq (C, g)$ si existe $h : A \to_{\mathcal{C}} C$ que hace conmutar el diagrama:



i.e. $g \circ h = f$.

Subobjetos

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

La relación "$\leq$" entre subobjetos de B es reflexiva y transitiva, sin embargo no es antisimétrica, ya que

Subobjetos

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

La relación "$\leq$" entre subobjetos de B es reflexiva y transitiva, sin embargo no es antisimétrica, ya que

$$(A, f) \leq (C, g) \text{ y } (C, g) \leq (A, f) \iff A \simeq^{h}_{\mathcal{C}} C \text{ y } g \circ h = f$$

Subobjetos

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

La relación "$\leq$" entre subobjetos de B es reflexiva y transitiva, sin embargo no es antisimétrica, ya que

$$(A, f) \leq (C, g) \text{ y } (C, g) \leq (A, f) \iff A \simeq_C^h C \text{ y } g \circ h = f$$

Pero la segunda parte de esta equivalencia no implica necesariamente una igualdad entre (A, f) y (C, g).

Subobjetos

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

La relación "$\leq$" entre subobjetos de B es reflexiva y transitiva, sin embargo no es antisimétrica, ya que

$$(A, f) \leq (C, g) \text{ y } (C, g) \leq (A, f) \iff A \simeq^{h}_{\mathcal{C}} C \text{ y } g \circ h = f$$

Pero la segunda parte de esta equivalencia no implica necesariamente una igualdad entre (A, f) y (C, g).

No obstante, sabemos que en Set la pareja $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$ sí forma un poset...

Subobjetos

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Por dicha razón, como la relación "$\leq$" induce una relación de equivalencia "$\approx$" definida mediante: $(A, f) \approx (C, g)$ sii $(A, f) \leq (C, g)$ y $(C, g) \leq (A, f)$, la noción de ser subobjeto se toma sobre el cociente de esta relación de equivalencia.

Subobjetos

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Por dicha razón, como la relación "$\leq$" induce una relación de equivalencia "$\approx$" definida mediante: $(A, f) \approx (C, g)$ sii $(A, f) \leq (C, g)$ y $(C, g) \leq (A, f)$, la noción de ser subobjeto se toma sobre el cociente de esta relación de equivalencia.

Definición (Categoría con potencia)

De esta manera, se dice que la categoría $\mathcal{C}$ tiene potencia si el cociente de la colección de subobjetos de cualquier $\mathcal{C}$-objeto y $\approx$ es un conjunto, i.e. si para todo $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$:

Subobjetos

Por dicha razón, como la relación "$\leq$" induce una relación de equivalencia "$\approx$" definida mediante: $(A, f) \approx (C, g)$ sii $(A, f) \leq (C, g)$ y $(C, g) \leq (A, f)$, la noción de ser subobjeto se toma sobre el cociente de esta relación de equivalencia.

Definición (Categoría con potencia)

De esta manera, se dice que la categoría $\mathcal{C}$ tiene potencia si el cociente de la colección de subobjetos de cualquier $\mathcal{C}$-objeto y $\approx$ es un conjunto, i.e. si para todo $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$:

$$\frac{\{(A, a) \mid (A, a) \subseteq_{\mathcal{C}} B\}}{\approx} = \{[(A, a)]_{\approx} \mid (A, a) \subseteq_{\mathcal{C}} B\} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$$

Subobjetos

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Subobjetos

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Functor Subobjeto)

Con esta información en mente, dada una categoría $\mathcal{C}$ que tiene potencia, se define el functor contravariante "subobjeto" $\mathrm{Sub} : \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$ de tal modo que:

- En objetos: $\mathrm{Sub}(B) := \{[(A, a)]_{\approx} \mid (A, a) \subseteq_{\mathcal{C}} B\}$.
- En morfismos: Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, entonces $\mathrm{Sub}(f) : \mathrm{Sub}(B) \to \mathrm{Sub}(A)$ es tal que a cada representante $[(C, c)] \in \mathrm{Sub}(B)$, $\mathrm{Sub}(f)$ lo manda a $[(D, d)] \in \mathrm{Sub}(A)$, donde d es el *pullback* de c a lo largo de f:

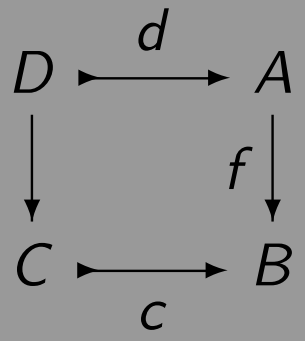
Subobjetos

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Functor Subobjeto)

Con esta información en mente, dada una categoría $\mathcal{C}$ que tiene potencia, se define el functor contravariante "subobjeto" $\mathrm{Sub} : \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$ de tal modo que:

- En objetos: $\mathrm{Sub}(B) := \{[(A, a)]_{\approx} \mid (A, a) \subseteq_{\mathcal{C}} B\}$.
- En morfismos: Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, entonces $\mathrm{Sub}(f) : \mathrm{Sub}(B) \to \mathrm{Sub}(A)$ es tal que a cada representante $[(C, c)] \in \mathrm{Sub}(B)$, $\mathrm{Sub}(f)$ lo manda a $[(D, d)] \in \mathrm{Sub}(A)$, donde d es el *pullback* de c a lo largo de f:



Lema de Yoneda y Elementos Universales

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Teorema (Lema de Yoneda)

Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña. Si G es un functor contravariante de $\mathcal{C}$ en Set, *entonces para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ se cumple que $[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), G] \cong G(A)$.*

La notación anterior está diciendo que "el conjunto de transformaciones naturales entre los functores $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ y G está en correspondencia uno a uno con el conjunto $G(A)$". Esta biyección se genera por la función de Yoneda que es mejor vista como un isomorfismo natural entre dos functores de $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \times \mathcal{C}$ en Set:

- El functor evaluación $(G, A) \mapsto G(A)$.
- El functor $(G, A) \mapsto [\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), G]$.

Lema de Yoneda y Elementos Universales

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Teorema (Lema de Yoneda)

Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña. Si G es un functor contravariante de $\mathcal{C}$ en Set, *entonces para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ se cumple que $[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), G] \cong G(A)$.*

La notación anterior está diciendo que "el conjunto de transformaciones naturales entre los functores $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ y G está en correspondencia uno a uno con el conjunto $G(A)$". Esta biyección se genera por la función de Yoneda que es mejor vista como un isomorfismo natural entre dos functores de $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \times \mathcal{C}$ en Set:

- El functor evaluación $(G, A) \mapsto G(A)$.
- El functor $(G, A) \mapsto [\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), G]$.

Lema de Yoneda y Elementos Universales

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Teorema (Lema de Yoneda)

Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña. Si G es un functor contravariante de $\mathcal{C}$ en Set, *entonces para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ se cumple que* $[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), G] \cong G(A)$.

La notación anterior está diciendo que "el conjunto de transformaciones naturales entre los functores $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ y G está en correspondencia uno a uno con el conjunto $G(A)$". Esta biyección se genera por la función de Yoneda que es mejor vista como un isomorfismo natural entre dos functores de $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \times \mathcal{C}$ en Set:

- El functor evaluación $(G, A) \mapsto G(A)$.
- El functor $(G, A) \mapsto [\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), G]$.

Lema de Yoneda y Elementos Universales

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Teorema (Lema de Yoneda)

Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña. Si G es un functor contravariante de $\mathcal{C}$ en Set, *entonces para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ se cumple que $[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), G] \cong G(A)$.*

La notación anterior está diciendo que "el conjunto de transformaciones naturales entre los functores $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ y G está en correspondencia uno a uno con el conjunto $G(A)$". Esta biyección se genera por la función de Yoneda que es mejor vista como un isomorfismo natural entre dos functores de $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \times \mathcal{C}$ en Set:

- El functor evaluación $(G, A) \mapsto G(A)$.
- El functor $(G, A) \mapsto [\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), G]$.

Lema de Yoneda y Elementos Universales

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Teorema (Lema de Yoneda)

Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña. Si G es un functor contravariante de $\mathcal{C}$ en Set, *entonces para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ se cumple que $[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), G] \cong G(A)$.*

La notación anterior está diciendo que "el conjunto de transformaciones naturales entre los functores $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ y G está en correspondencia uno a uno con el conjunto $G(A)$". Esta biyección se genera por la función de Yoneda que es mejor vista como un isomorfismo natural entre dos functores de $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \times \mathcal{C}$ en Set:

- El functor evaluación $(G, A) \mapsto G(A)$.
- El functor $(G, A) \mapsto [\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), G]$.

Lema de Yoneda y Functores Representables

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Como corolario substitúyase G por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B)$ y obsérvese que eso induce que $[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B)] \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, lo cual indica que el functor $Y : X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ es pleno y fiel. Esto a su vez significa que la categoría $\mathcal{C}$ está encajada en $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ con lo cual se pueden generalizar los objetos de $\mathcal{C}$ a los de $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$. Estos objetos "ocultos" es a quienes llamamos los functores representables:

Definición (Functor Representable)

Dada una categoría localmente pequeña $\mathcal{C}$, decimos que un functor contravariante $G : \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$ es representable si es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ para algún $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Lema de Yoneda y Functores Representables

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Como corolario substitúyase G por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B)$ y obsérvese que eso induce que $[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B)] \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, lo cual indica que el functor $Y : X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ es pleno y fiel. Esto a su vez significa que la categoría $\mathcal{C}$ está encajada en $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ con lo cual se pueden generalizar los objetos de $\mathcal{C}$ a los de $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$. Estos objetos "ocultos" es a quienes llamamos los functores representables:

Definición (Functor Representable)

Dada una categoría localmente pequeña $\mathcal{C}$, decimos que un functor contravariante $G : \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$ es representable si es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ para algún $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Lema de Yoneda y Functores Representables

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Como corolario substitúyase G por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B)$ y obsérvese que eso induce que $[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B)] \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, lo cual indica que el functor $Y : X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ es pleno y fiel. Esto a su vez significa que la categoría $\mathcal{C}$ está encajada en $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ con lo cual se pueden generalizar los objetos de $\mathcal{C}$ a los de $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$. Estos objetos "ocultos" es a quienes llamamos los functores representables:

Definición (Functor Representable)

Dada una categoría localmente pequeña $\mathcal{C}$, decimos que un functor contravariante $G : \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$ es representable si es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ para algún $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Lema de Yoneda y Functores Representables

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Como corolario substitúyase G por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B)$ y obsérvese que eso induce que $[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B)] \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, lo cual indica que el functor $Y : X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ es pleno y fiel. Esto a su vez significa que la categoría $\mathcal{C}$ está encajada en $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ con lo cual se pueden generalizar los objetos de $\mathcal{C}$ a los de $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$. Estos objetos "ocultos" es a quienes llamamos los functores representables:

Definición (Functor Representable)

Dada una categoría localmente pequeña $\mathcal{C}$, decimos que un functor contravariante $G : \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$ es representable si es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ para algún $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Sección 2
Topos

Functor Producto Cartesiano

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Functor Producto Cartesiano)

Dada una categoría $\mathcal{E}$ con productos finitos, se verifica que las funciones:

- En objetos $- \times A : \mathrm{Ob}(\mathcal{E}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{E}) : B \mapsto B \times A$.
- En morfismos $- \times A : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(B, B') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(B \times A, B' \times A)$ tal que $- \times A : f \mapsto f \times A := (f \circ \pi_B, \pi_A)$.

Forman un functor

Functor Producto Cartesiano

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Functor Producto Cartesiano)

Dada una categoría $\mathcal{E}$ con productos finitos, se verifica que las funciones:

- En objetos $- \times A : \mathrm{Ob}(\mathcal{E}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{E}) : B \mapsto B \times A$.
- En morfismos
  $- \times A : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(B, B') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(B \times A, B' \times A)$ tal que
  $- \times A : f \mapsto f \times A := (f \circ \pi_B, \pi_A)$.

Forman un functor

Objeto Potencia

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Obsérvese que la composición $\mathrm{Sub}(- \times A)$ genera un functor contravariante $\mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$ y así:

Definición (Objeto Potencia)

Dada una categoría con límites finitos y con potencias, si para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ se cumple que el functor $\mathrm{Sub}(- \times A)$ es representable, entonces el representante de éste es llamado objeto potencia $\mathcal{P}A$.

La justificación de la definición recientemente dada está basada en teoría de conjuntos y consite en recordar que existe una biyección entre el conjunto potencia de un producto cartesiano $\mathcal{P}(B \times A)$ y el conjunto de funciones que van del primer factor B al potencia del segundo $\mathcal{P}(A)$, es decir:

$$|\mathcal{P}(B \times A)| = 2^{|A \times B|} = 2^{|A| \cdot |B|} = \left(2^{|A|}\right)^{|B|} = |\mathcal{P}A|^{|B|} = |(\mathcal{P}A)^B|$$

Objeto Potencia

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Obsérvese que la composición $\mathrm{Sub}(- \times A)$ genera un functor contravariante $\mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$ y así:

Definición (Objeto Potencia)

Dada una categoría con límites finitos y con potencias, si para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ se cumple que el functor $\mathrm{Sub}(- \times A)$ es representable, entonces el representante de éste es llamado objeto potencia $\mathcal{P}A$.

La justificación de la definición recientemente dada está basada en teoría de conjuntos y consite en recordar que existe una biyección entre el conjunto potencia de un producto cartesiano $\mathcal{P}(B \times A)$ y el conjunto de funciones que van del primer factor B al potencia del segundo $\mathcal{P}(A)$, es decir:

$$|\mathcal{P}(B \times A)| = 2^{|A \times B|} = 2^{|A| \cdot |B|} = \left(2^{|A|}\right)^{|B|} = |\mathcal{P}A|^{|B|} = |(\mathcal{P}A)^B|$$

Objeto Potencia

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Obsérvese que la composición $\mathrm{Sub}(- \times A)$ genera un functor contravariante $\mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$ y así:

Definición (Objeto Potencia)

Dada una categoría con límites finitos y con potencias, si para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ se cumple que el functor $\mathrm{Sub}(- \times A)$ es representable, entonces el representante de éste es llamado objeto potencia $\mathcal{P}A$.

La justificación de la definición recientemente dada está basada en teoría de conjuntos y consite en recordar que existe una biyección entre el conjunto potencia de un producto cartesiano $\mathcal{P}(B \times A)$ y el conjunto de funciones que van del primer factor B al potencia del segundo $\mathcal{P}(A)$, es decir:

$$|\mathcal{P}(B \times A)| = 2^{|A \times B|} = 2^{|A| \cdot |B|} = \left(2^{|A|}\right)^{|B|} = |\mathcal{P}A|^{|B|} = |(\mathcal{P}A)^B|$$

Objeto Potencia

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Obsérvese que la composición $\mathrm{Sub}(- \times A)$ genera un functor contravariante $\mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$ y así:

Definición (Objeto Potencia)

Dada una categoría con límites finitos y con potencias, si para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ se cumple que el functor $\mathrm{Sub}(- \times A)$ es representable, entonces el representante de éste es llamado objeto potencia $\mathcal{P}A$.

La justificación de la definición recientemente dada está basada en teoría de conjuntos y consite en recordar que existe una biyección entre el conjunto potencia de un producto cartesiano $\mathcal{P}(B \times A)$ y el conjunto de funciones que van del primer factor B al potencia del segundo $\mathcal{P}(A)$, es decir:

$$|\mathcal{P}(B \times A)| = 2^{|A \times B|} = 2^{|A| \cdot |B|} = \left(2^{|A|}\right)^{|B|} = |\mathcal{P}A|^{|B|} = |(\mathcal{P}A)^B|$$

Objeto Potencia

Con esta idea en mente, dada una categoría $\mathcal{C}$ con potencias y límites finitos deberíamos poder hallar una biyección entre los subobjetos de un producto cartesiano $\mathrm{Sub}(B \times A)$ (el equivalente a $\mathcal{P}(B \times A)$) y el conjunto de morfismos de B en el "objeto potencia de A", $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, \mathcal{P}A)$ (el equivalente a $(\mathcal{P}A)^B$). Esta biyección se genera al pedir la representabilidad del functor $\mathrm{Sub}(- \times A)$, pues si éste es representable por $\mathcal{P}A$, obtenemos un isomorfismo natural entre $\mathrm{Sub}(- \times A)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}A)$. Es decir, si $f : B' \to_{\mathcal{C}} B$, entonces conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sub}(B \times A) & \xrightarrow{\eta_B} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, \mathcal{P}A) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sub}(f \times A)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, \mathcal{P}A)} \\ \mathrm{Sub}(B' \times A) & \xrightarrow{\eta'_B} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B', \mathcal{P}A) \end{array}$$

Donde los $\{\eta_B \mid B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}$ son isomorfismos de Set, es decir, biyecciones.

Objeto Potencia

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Con esta idea en mente, dada una categoría $\mathcal{C}$ con potencias y límites finitos deberíamos poder hallar una biyección entre los subobjetos de un producto cartesiano $\mathrm{Sub}(B \times A)$ (el equivalente a $\mathcal{P}(B \times A)$) y el conjunto de morfismos de B en el "objeto potencia de A", $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, \mathcal{P}A)$ (el equivalente a $(\mathcal{P}A)^B$). Esta biyección se genera al pedir la representabilidad del functor $\mathrm{Sub}(- \times A)$, pues si éste es representable por $\mathcal{P}A$, obtenemos un isomorfismo natural entre $\mathrm{Sub}(- \times A)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}A)$. Es decir, si $f : B' \to_{\mathcal{C}} B$, entonces conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sub}(B \times A) & \xrightarrow{\eta_B} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, \mathcal{P}A) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sub}(f \times A)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, \mathcal{P}A)} \\ \mathrm{Sub}(B' \times A) & \xrightarrow{\eta'_B} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B', \mathcal{P}A) \end{array}$$

Donde los $\{\eta_B \mid B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}$ son isomorfismos de Set, es decir, biyecciones.

Objeto Potencia

Con esta idea en mente, dada una categoría $\mathcal{C}$ con potencias y límites finitos deberíamos poder hallar una biyección entre los subobjetos de un producto cartesiano $\mathrm{Sub}(B \times A)$ (el equivalente a $\mathcal{P}(B \times A)$) y el conjunto de morfismos de B en el "objeto potencia de A", $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, \mathcal{P}A)$ (el equivalente a $(\mathcal{P}A)^B$). Esta biyección se genera al pedir la representabilidad del functor $\mathrm{Sub}(- \times A)$, pues si éste es representable por $\mathcal{P}A$, obtenemos un isomorfismo natural entre $\mathrm{Sub}(- \times A)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}A)$. Es decir, si $f : B' \to_{\mathcal{C}} B$, entonces conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sub}(B \times A) & \xrightarrow{\eta_B} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, \mathcal{P}A) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sub}(f \times A)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, \mathcal{P}A)} \\ \mathrm{Sub}(B' \times A) & \xrightarrow{\eta'_B} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B', \mathcal{P}A) \end{array}$$

Donde los $\{\eta_B \mid B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}$ son isomorfismos de Set, es decir, biyecciones.

Objeto Potencia

Con esta idea en mente, dada una categoría $\mathcal{C}$ con potencias y límites finitos deberíamos poder hallar una biyección entre los subobjetos de un producto cartesiano $\mathrm{Sub}(B \times A)$ (el equivalente a $\mathcal{P}(B \times A)$) y el conjunto de morfismos de B en el "objeto potencia de A", $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, \mathcal{P}A)$ (el equivalente a $(\mathcal{P}A)^B$). Esta biyección se genera al pedir la representabilidad del functor $\mathrm{Sub}(- \times A)$, pues si éste es representable por $\mathcal{P}A$, obtenemos un isomorfismo natural entre $\mathrm{Sub}(- \times A)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}A)$. Es decir, si $f : B' \to_{\mathcal{C}} B$, entonces conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sub}(B \times A) & \xrightarrow{\eta_B} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, \mathcal{P}A) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sub}(f \times A)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, \mathcal{P}A)} \\ \mathrm{Sub}(B' \times A) & \xrightarrow{\eta'_B} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B', \mathcal{P}A) \end{array}$$

Donde los $\{\eta_B \mid B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}$ son isomorfismos de Set, es decir, biyecciones.

Objeto Potencia

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Objeto Potencia

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Alternativamente uno puede estudiar el comportamiento de $\mathcal{P}A$ en Set respecto a la relación de pertenencia $\in$ y abstraer los morfismos "escondidos" para definir los *objetos potencia*.

Objeto Potencia

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Alternativamente uno puede estudiar el comportamiento de $\mathcal{P}A$ en Set respecto a la relación de pertenencia $\in$ y abstraer los morfismos "escondidos" para definir los *objetos potencia*.
Así defínase la relación $\in_A := \{(B, x) \mid x \in B \subseteq A\} \subseteq \mathcal{P}(A) \times A$ y recuérdese que hay una biyección entre los subconjuntos de A y las funciones características en A, por lo cual podemos reexpresar a $\in_A$ como:

Objeto Potencia

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Alternativamente uno puede estudiar el comportamiento de $\mathcal{P}A$ en Set respecto a la relación de pertenencia $\in$ y abstraer los morfismos "escondidos" para definir los *objetos potencia*.
Así defínase la relación $\in_A := \{(B, x) \mid x \in B \subseteq A\} \subseteq \mathcal{P}(A) \times A$ y recuérdese que hay una biyección entre los subconjuntos de A y las funciones características en A, por lo cual podemos reexpresar a $\in_A$ como:

$$\in'_A := \{(\chi_B, x) \mid x \in B \subseteq A\} \subseteq 2^A \times A$$

Objeto Potencia

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Alternativamente uno puede estudiar el comportamiento de $\mathcal{P}A$ en Set respecto a la relación de pertenencia $\in$ y abstraer los morfismos "escondidos" para definir los *objetos potencia*.
Así defínase la relación $\in_A := \{(B, x) \mid x \in B \subseteq A\} \subseteq \mathcal{P}(A) \times A$ y recuérdese que hay una biyección entre los subconjuntos de A y las funciones características en A, por lo cual podemos reexpresar a $\in_A$ como:

$$\in'_A := \{(\chi_B, x) \mid x \in B \subseteq A\} \subseteq 2^A \times A$$

Posteriormente, recuérdese que la aseveración $|\mathcal{P}(B \times A)| = |(\mathcal{P}A)^B|$, está dada por la función biyectiva $F : \mathcal{P}(B \times A) \to (\mathcal{P}A)^B$ definida por $F(R) := f_R : x \mapsto R[\{x\}]$, con inversa $F^{-1} : (\mathcal{P}A)^B \to \mathcal{P}(B \times A)$, donde $(x, y) \in F^{-1}(f) := R_f$ si y sólo si $y \in f(x)$.

Objeto Potencia

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Obsérvese entonces que:

Objeto Potencia

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Obsérvese entonces que:

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow y \in f_R(x) \Leftrightarrow (f_R(x), y) \in \in_A \Leftrightarrow (f_R \times 1_A)(x, y) \in \in_A$$

Es decir:

Objeto Potencia

Obsérvese entonces que:

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow y \in f_R(x) \Leftrightarrow (f_R(x),y) \in \in_A \Leftrightarrow (f_R \times 1_A)(x,y) \in \in_A$$

Es decir:

$$R = (f_R \times 1_A)^{-1}[\in_A]$$

Por lo cual se genera el cuadrado conmutativo:

Objeto Potencia

Obsérvese entonces que:

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow y \in f_R(x) \Leftrightarrow (f_R(x),y) \in \in_A \Leftrightarrow (f_R \times 1_A)(x,y) \in \in_A$$

Es decir:

$$R = (f_R \times 1_A)^{-1}[\in_A]$$

Por lo cual se genera el cuadrado conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} R & \hookrightarrow & B \times A \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_R \times 1_A} \\ \in_A & \hookrightarrow & \mathcal{P}(A) \times A \end{array}$$

Objeto Potencia

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Proposición

- *El cuadrado de la diapositiva anterior es un cuadrado pullback.*
- *Una vez fija $R \overset{r}{\hookrightarrow} B \times A$, la función f_R es la única de B en $\mathcal{P}A$ que genera (sin importar qué es g) un cuadro pullback de la forma del diagrama anterior.*

Demostración.

Ya sabemos que el cuadrado conmuta. Sea $(R', g', (\iota'_1, \iota'_2))$ una solución para $\in_A \hookrightarrow \mathcal{P}(A) \times A \xleftarrow{f_R \times 1_A} B \times A$. Entonces se satisface la igualdad de funciones $(f_R \times 1_A) \circ (\iota'_1, \iota'_2) = \iota_{\in_A} \circ g'$. Para $z \in R'$ tenemos que $\in_A \ni g'(z) = (f_R \times 1_A) \circ (\iota'_1, \iota'_2)(z) = (f_R \times 1_A)(\iota'_1(z), \iota'_2(z)) = (f_R(\iota'_1(z)), \iota'_2(z))$. Por lo que $\iota'_2(z) \in f_R(\iota'_1(z)) = R[\{\iota'_1(z)\}]$. Lo cual nos dice que $(\iota'_1, \iota'_2)(z) = (\iota'_1(z), \iota'_2(z)) \in R$. □

Objeto Potencia

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Proposición

- *El cuadrado de la diapositiva anterior es un cuadrado pullback.*
- *Una vez fija $R \overset{r}{\hookrightarrow} B \times A$, la función f_R es la única de B en $\mathcal{P}A$ que genera (sin importar qué es g) un cuadro pullback de la forma del diagrama anterior.*

Demostración.

Ya sabemos que el cuadrado conmuta. Sea $(R', g', (\iota'_1, \iota'_2))$ una solución para $\in_A \hookrightarrow \mathcal{P}(A) \times A \xleftarrow{f_R \times 1_A} B \times A$. Entonces se satisface la igualdad de funciones $(f_R \times 1_A) \circ (\iota'_1, \iota'_2) = \iota_{\in_A} \circ g'$.

Para $z \in R'$ tenemos que $\in_A \ni g'(z) = (f_R \times 1_A) \circ (\iota'_1, \iota'_2)(z) = (f_R \times 1_A)(\iota'_1(z), \iota'_2(z)) = (f_R(\iota'_1(z)), \iota'_2(z))$. Por lo que $\iota'_2(z) \in f_R(\iota'_1(z)) = R[\{\iota'_1(z)\}]$. Lo cual nos dice que $(\iota'_1, \iota'_2)(z) = (\iota'_1(z), \iota'_2(z)) \in R$. □

Objeto Potencia

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Proposición

- *El cuadrado de la diapositiva anterior es un cuadrado pullback.*
- *Una vez fija $R \overset{r}{\hookrightarrow} B \times A$, la función f_R es la única de B en $\mathcal{P}A$ que genera (sin importar qué es g) un cuadro pullback de la forma del diagrama anterior.*

Demostración.

Ya sabemos que el cuadrado conmuta. Sea $(R', g', (\iota'_1, \iota'_2))$ una solución para $\in_A \hookrightarrow \mathcal{P}(A) \times A \xleftarrow{f_R \times 1_A} B \times A$. Entonces se satisface la igualdad de funciones $(f_R \times 1_A) \circ (\iota'_1, \iota'_2) = \iota_{\in_A} \circ g'$. Para $z \in R'$ tenemos que $\in_A \ni g'(z) = (f_R \times 1_A) \circ (\iota'_1, \iota'_2)(z) = (f_R \times 1_A)(\iota'_1(z), \iota'_2(z)) = (f_R(\iota'_1(z)), \iota'_2(z))$. Por lo que $\iota'_2(z) \in f_R(\iota'_1(z)) = R[\{\iota'_1(z)\}]$. Lo cual nos dice que $(\iota'_1, \iota'_2)(z) = (\iota'_1(z), \iota'_2(z)) \in R$. □

Objeto Potencia

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Proposición

- *El cuadrado de la diapositiva anterior es un cuadrado pullback.*
- *Una vez fija $R \overset{r}{\hookrightarrow} B \times A$, la función f_R es la única de B en $\mathcal{P}A$ que genera (sin importar qué es g) un cuadro pullback de la forma del diagrama anterior.*

Demostración.

Ya sabemos que el cuadrado conmuta. Sea $(R', g', (\iota'_1, \iota'_2))$ una solución para $\in_A \hookrightarrow \mathcal{P}(A) \times A \xleftarrow{f_R \times 1_A} B \times A$. Entonces se satisface la igualdad de funciones $(f_R \times 1_A) \circ (\iota'_1, \iota'_2) = \iota_{\in_A} \circ g'$. Para $z \in R'$ tenemos que $\in_A \ni g'(z) = (f_R \times 1_A) \circ (\iota'_1, \iota'_2)(z) = (f_R \times 1_A)(\iota'_1(z), \iota'_2(z)) = (f_R(\iota'_1(z)), \iota'_2(z))$. Por lo que $\iota'_2(z) \in f_R(\iota'_1(z)) = R[\{\iota'_1(z)\}]$. Lo cual nos dice que $(\iota'_1, \iota'_2)(z) = (\iota'_1(z), \iota'_2(z)) \in R$. □

Objeto Potencia

Proposición

- *El cuadrado de la diapositiva anterior es un cuadrado pullback.*
- *Una vez fija $R \overset{r}{\hookrightarrow} B \times A$, la función f_R es la única de B en $\mathcal{P}A$ que genera (sin importar qué es g) un cuadro pullback de la forma del diagrama anterior.*

Demostración.

Ya sabemos que el cuadrado conmuta. Sea $(R', g', (\iota'_1, \iota'_2))$ una solución para $\in_A \hookrightarrow \mathcal{P}(A) \times A \xleftarrow{f_R \times 1_A} B \times A$. Entonces se satisface la igualdad de funciones $(f_R \times 1_A) \circ (\iota'_1, \iota'_2) = \iota_{\in_A} \circ g'$. Para $z \in R'$ tenemos que $\in_A \ni g'(z) = (f_R \times 1_A) \circ (\iota'_1, \iota'_2)(z) = (f_R \times 1_A)(\iota'_1(z), \iota'_2(z)) = (f_R(\iota'_1(z)), \iota'_2(z))$. Por lo que $\iota'_2(z) \in f_R(\iota'_1(z)) = R[\{\iota'_1(z)\}]$. Lo cual nos dice que $(\iota'_1, \iota'_2)(z) = (\iota'_1(z), \iota'_2(z)) \in R$. □

Objeto Potencia

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Demostración.

Así, proponemos a nuestro morfismo mediador como $m : R' \to R$ el cual cumple que $m(z) := (\iota'_1(z), \iota'_2(z))$. Se verifica que el triángulo superior conmuta. Para el inferior obsérvese que $g = (f_R \times 1_A) \restriction R$. Así, para $z \in R$, se tiene que $(g \circ m)(z) = g(\iota'_1(z), \iota'_2(z)) = f_R \times 1_A(\iota'_1(z), \iota'_2(z)) = g'(z)$.
Finalmente, la unicidad de "m" se obtiene al analizar el triángulo superior.
Para la unicidad de f_R respecto al cuadrado *pullback*, sea $h : B \to \mathcal{P}A$ tal que $h \times 1_A(x, y) = (h(x), y) = g(x, y) \in \in_A$ para $(x, y) \in R$ y también tal que (R, r, g) es la solución *pullback* de $\in_A \hookrightarrow \mathcal{P}(A) \times A \xleftarrow{h \times 1_A} B \times A$. □

Objeto Potencia

Demostración.

Así, proponemos a nuestro morfismo mediador como $m : R' \to R$ el cual cumple que $m(z) := (\iota'_1(z), \iota'_2(z))$. Se verifica que el triángulo superior conmuta. Para el inferior obsérvese que $g = (f_R \times 1_A) \restriction R$. Así, para $z \in R$, se tiene que $(g \circ m)(z) = g(\iota'_1(z), \iota'_2(z)) = f_R \times 1_A(\iota'_1(z), \iota'_2(z)) = g'(z)$. Finalmente, la unicidad de "m" se obtiene al analizar el triángulo superior.

Para la unicidad de f_R respecto al cuadrado *pullback*, sea $h : B \to \mathcal{P}A$ tal que $h \times 1_A(x, y) = (h(x), y) = g(x, y) \in \in_A$ para $(x, y) \in R$ y también tal que (R, r, g) es la solución *pullback* de $\in_A \hookrightarrow \mathcal{P}(A) \times A \xleftarrow{h \times 1_A} B \times A$. □

Objeto Potencia

Demostración.

Así, proponemos a nuestro morfismo mediador como $m : R' \to R$ el cual cumple que $m(z) := (\iota'_1(z), \iota'_2(z))$. Se verifica que el triángulo superior conmuta. Para el inferior obsérvese que $g = (f_R \times 1_A) \restriction R$. Así, para $z \in R$, se tiene que $(g \circ m)(z) = g(\iota'_1(z), \iota'_2(z)) = f_R \times 1_A(\iota'_1(z), \iota'_2(z)) = g'(z)$. Finalmente, la unicidad de "m" se obtiene al analizar el triángulo superior.

Para la unicidad de f_R respecto al cuadrado *pullback*, sea $h : B \to \mathcal{P}A$ tal que $h \times 1_A(x, y) = (h(x), y) = g(x, y) \in \in_A$ para $(x, y) \in R$ y también tal que (R, r, g) es la solución *pullback* de $\in_A \hookrightarrow \mathcal{P}(A) \times A \xleftarrow{h \times 1_A} B \times A$. □

Objeto Potencia

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Demostración.

Así, proponemos a nuestro morfismo mediador como $m : R' \to R$ el cual cumple que $m(z) := (\iota'_1(z), \iota'_2(z))$. Se verifica que el triángulo superior conmuta. Para el inferior obsérvese que $g = (f_R \times 1_A) \restriction R$. Así, para $z \in R$, se tiene que $(g \circ m)(z) = g(\iota'_1(z), \iota'_2(z)) = f_R \times 1_A(\iota'_1(z), \iota'_2(z)) = g'(z)$.

Finalmente, la unicidad de "m" se obtiene al analizar el triángulo superior.

Para la unicidad de f_R respecto al cuadrado *pullback*, sea $h : B \to \mathcal{P}A$ tal que $h \times 1_A(x, y) = (h(x), y) = g(x, y) \in \in_A$ para $(x, y) \in R$ y también tal que (R, r, g) es la solución *pullback* de $\in_A \hookrightarrow \mathcal{P}(A) \times A \xleftarrow{h \times 1_A} B \times A$. □

Objeto Potencia

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Demostración.

Así, proponemos a nuestro morfismo mediador como $m : R' \to R$ el cual cumple que $m(z) := (\iota'_1(z), \iota'_2(z))$. Se verifica que el triángulo superior conmuta. Para el inferior obsérvese que $g = (f_R \times 1_A) \restriction R$. Así, para $z \in R$, se tiene que $(g \circ m)(z) = g(\iota'_1(z), \iota'_2(z)) = f_R \times 1_A(\iota'_1(z), \iota'_2(z)) = g'(z)$. Finalmente, la unicidad de "m" se obtiene al analizar el triángulo superior.

Para la unicidad de f_R respecto al cuadrado *pullback*, sea $h : B \to \mathcal{P}A$ tal que $h \times 1_A(x, y) = (h(x), y) = g(x, y) \in \in_A$ para $(x, y) \in R$ y también tal que (R, r, g) es la solución *pullback* de $\in_A \hookrightarrow \mathcal{P}(A) \times A \xleftarrow{h \times 1_A} B \times A$. □

Objeto Potencia

Demostración.

Así, proponemos a nuestro morfismo mediador como $m : R' \to R$ el cual cumple que $m(z) := (\iota'_1(z), \iota'_2(z))$. Se verifica que el triángulo superior conmuta. Para el inferior obsérvese que $g = (f_R \times 1_A) \restriction R$. Así, para $z \in R$, se tiene que $(g \circ m)(z) = g(\iota'_1(z), \iota'_2(z)) = f_R \times 1_A(\iota'_1(z), \iota'_2(z)) = g'(z)$.
Finalmente, la unicidad de "m" se obtiene al analizar el triángulo superior.
Para la unicidad de f_R respecto al cuadrado *pullback*, sea $h : B \to \mathcal{P}A$ tal que $h \times 1_A(x, y) = (h(x), y) = g(x, y) \in \in_A$ para $(x, y) \in R$ y también tal que (R, r, g) es la solución *pullback* de $\in_A \hookrightarrow \mathcal{P}(A) \times A \xleftarrow{h \times 1_A} B \times A$. □

Objeto Potencia

Demostración.

Entonces para $x \in B$, deseamos ver que $h(x) = f_R(x)$.

- $\supseteq$ Sea $y \in f_R(x)$, entonces $(x, y) \in R$ de donde $(h \times 1_A)(x, y) = (h(x), y) = g(x, y) \in \in_A$. Por ende $y \in h(x)$.
- $\subseteq$ Defínase $g' : h(x) \to \in_A$ por $g'(z) := (h(x), z)$ y $r' : h(x) \to B \times A$ tal que $r'(z) := (x, z)$, entonces $(h(x), r', g')$ es solución del diagrama $\in_A \hookrightarrow \mathcal{P}(A) \times A \xleftarrow{h \times 1_A} B \times A$. Por propiedades del *pullback* (R, r, g), existe un único $m : h(x) \to R$ tal que $r \circ m = r'$. De aquí que si $y \in h(x)$, entonces $(x, y) = r'(y) = m(y) \in R$. Por ende $y \in R[\{x\}] = f_R(x)$.

□

Objeto Potencia

Demostración.

Entonces para $x \in B$, deseamos ver que $h(x) = f_R(x)$.

$\supseteq$ Sea $y \in f_R(x)$, entonces $(x, y) \in R$ de donde $(h \times 1_A)(x, y) = (h(x), y) = g(x, y) \in \in_A$. Por ende $y \in h(x)$.

$\subseteq$ Defínase $g' : h(x) \to \in_A$ por $g'(z) := (h(x), z)$ y $r' : h(x) \to B \times A$ tal que $r'(z) := (x, z)$, entonces $(h(x), r', g')$ es solución del diagrama $\in_A \hookrightarrow \mathcal{P}(A) \times A \xleftarrow{h \times 1_A} B \times A$. Por propiedades del *pullback* (R, r, g), existe un único $m : h(x) \to R$ tal que $r \circ m = r'$. De aquí que si $y \in h(x)$, entonces $(x, y) = r'(y) = m(y) \in R$. Por ende $y \in R[\{x\}] = f_R(x)$.

□

Objeto Potencia

Demostración.

Entonces para $x \in B$, deseamos ver que $h(x) = f_R(x)$.

$\supseteq$ Sea $y \in f_R(x)$, entonces $(x, y) \in R$ de donde $(h \times 1_A)(x, y) = (h(x), y) = g(x, y) \in \in_A$. Por ende $y \in h(x)$.

$\subseteq$ Defínase $g' : h(x) \to \in_A$ por $g'(z) := (h(x), z)$ y $r' : h(x) \to B \times A$ tal que $r'(z) := (x, z)$, entonces $(h(x), r', g')$ es solución del diagrama $\in_A \hookrightarrow \mathcal{P}(A) \times A \xleftarrow{h \times 1_A} B \times A$. Por propiedades del *pullback* (R, r, g), existe un único $m : h(x) \to R$ tal que $r \circ m = r'$. De aquí que si $y \in h(x)$, entonces $(x, y) = r'(y) = m(y) \in R$. Por ende $y \in R[\{x\}] = f_R(x)$.

□

Objeto Potencia

Demostración.

Entonces para $x \in B$, deseamos ver que $h(x) = f_R(x)$.

- $\supseteq$ Sea $y \in f_R(x)$, entonces $(x, y) \in R$ de donde $(h \times 1_A)(x, y) = (h(x), y) = g(x, y) \in \in_A$. Por ende $y \in h(x)$.
- $\subseteq$ Defínase $g' : h(x) \to \in_A$ por $g'(z) := (h(x), z)$ y $r' : h(x) \to B \times A$ tal que $r'(z) := (x, z)$, entonces $(h(x), r', g')$ es solución del diagrama $\in_A \hookrightarrow \mathcal{P}(A) \times A \xleftarrow{h \times 1_A} B \times A$. Por propiedades del *pullback* (R, r, g), existe un único $m : h(x) \to R$ tal que $r \circ m = r'$. De aquí que si $y \in h(x)$, entonces $(x, y) = r'(y) = m(y) \in R$. Por ende $y \in R[\{x\}] = f_R(x)$.

□

Objeto Potencia

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

De todo esto se produce la siguiente definición para objetos potencia:

Objeto Potencia

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

De todo esto se produce la siguiente definición para objetos potencia:

Definición

Se dice que una categoría $\mathcal{C}$ con productos tiene objetos potencia sii para cada $\mathcal{C}$-objeto A, existen otros $\mathcal{P}(A)$ y $\in_A$, y un monomorfismo $\in:\in_A \rightarrowtail_{\mathcal{C}} \mathcal{P}(A) \times A$ tales que para cualquier $\mathcal{C}$-objeto B y "relación" $r : R \rightarrowtail_{\mathcal{C}} B \times A$, existe un único $\mathcal{C}$-morfismo $f_r : B \rightarrowtail_{\mathcal{C}} \mathcal{P}(A)$ que induce un *pullback* en $\mathcal{C}$ de la forma:

Objeto Potencia

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

De todo esto se produce la siguiente definición para objetos potencia:

Definición

Se dice que una categoría $\mathcal{C}$ con productos tiene objetos potencia sii para cada $\mathcal{C}$-objeto A, existen otros $\mathcal{P}(A)$ y $\in_A$, y un monomorfismo $\in:\in_A \rightarrowtail_{\mathcal{C}} \mathcal{P}(A) \times A$ tales que para cualquier $\mathcal{C}$-objeto B y "relación" $r : R \rightarrowtail_{\mathcal{C}} B \times A$, existe un único $\mathcal{C}$-morfismo $f_r : B \rightarrowtail_{\mathcal{C}} \mathcal{P}(A)$ que induce un *pullback* en $\mathcal{C}$ de la forma:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{r} & B \times A \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_R \times 1_A} \\ \in_A & \xrightarrow[\in]{} & \mathcal{P}(A) \times A \end{array}$$

Topos

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Finalmente, procedemos a presentar la definición de topos:

Definición (Topos)

Un topos es una categoría $\mathcal{C}$ con las siguientes dos propiedades:

1. Es finitamente completa, es decir, existen todos sus límites indizados sobre categorías finitas.[a]
2. Todo $\mathcal{C}$-objeto tiene un objeto potencia.

[a] Equivalentemente:

- $\mathcal{C}$ tiene igualadores y todos sus productos finitos.
- $\mathcal{C}$ tiene igualadores, productos binarios y un objeto terminal.
- $\mathcal{C}$ tiene pullbacks y un objeto terminal.

Topos

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Finalmente, procedemos a presentar la definición de topos:

Definición (Topos)

Un topos es una categoría $\mathcal{C}$ con las siguientes dos propiedades:

1. Es finitamente completa, es decir, existen todos sus límites indizados sobre categorías finitas.[a]
2. Todo $\mathcal{C}$-objeto tiene un objeto potencia.

[a] Equivalentemente:

- $\mathcal{C}$ tiene igualadores y todos sus productos finitos.
- $\mathcal{C}$ tiene igualadores, productos binarios y un objeto terminal.
- $\mathcal{C}$ tiene pullbacks y un objeto terminal.

Topos

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Finalmente, procedemos a presentar la definición de topos:

Definición (Topos)

Un topos es una categoría $\mathcal{C}$ con las siguientes dos propiedades:

1. Es finitamente completa, es decir, existen todos sus límites indizados sobre categorías finitas.[a]
2. Todo $\mathcal{C}$-objeto tiene un objeto potencia.

[a] Equivalentemente:

- $\mathcal{C}$ tiene igualadores y todos sus productos finitos.
- $\mathcal{C}$ tiene igualadores, productos binarios y un objeto terminal.
- $\mathcal{C}$ tiene pullbacks y un objeto terminal.

Topos

Finalmente, procedemos a presentar la definición de topos:

Definición (Topos)

Un topos es una categoría $\mathcal{C}$ con las siguientes dos propiedades:

1. Es finitamente completa, es decir, existen todos sus límites indizados sobre categorías finitas.[a]
2. Todo $\mathcal{C}$-objeto tiene un objeto potencia.

[a] Equivalentemente:

- $\mathcal{C}$ tiene igualadores y todos sus productos finitos.
- $\mathcal{C}$ tiene igualadores, productos binarios y un objeto terminal.
- $\mathcal{C}$ tiene pullbacks y un objeto terminal.

Topos

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Los siguientes son ejemplos de *toposes*:

Topos

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Los siguientes son ejemplos de *toposes*:

Ejemplo

Topos

Los siguientes son ejemplos de *toposes*:

Ejemplo

1. La categoría Set, pues sabemos que tiene igualadores, $A \times B \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$ es el producto binario de A y B, y $\{\emptyset\}$ es un conjunto terminal. Además, como se ha estado viendo hasta ahora: $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ es el objeto potencia en Set para A.

Topos

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Los siguientes son ejemplos de *toposes*:

Ejemplo

1. La categoría Set, pues sabemos que tiene igualadores, $A \times B \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$ es el producto binario de A y B, y $\{\emptyset\}$ es un conjunto terminal. Además, como se ha estado viendo hasta ahora: $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ es el objeto potencia en Set para A.
2. La categoría Finset. Siendo los argumentos los mismos que para Set.

Topos

Los siguientes son ejemplos de *toposes*:

Ejemplo

1. La categoría Set, pues sabemos que tiene igualadores, $A \times B \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$ es el producto binario de A y B, y $\{\emptyset\}$ es un conjunto terminal. Además, como se ha estado viendo hasta ahora: $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ es el objeto potencia en Set para A.
2. La categoría Finset. Siendo los argumentos los mismos que para Set.
3. La categoría Finord, pues todo conjunto finito es equipotente con algún ordinal finito. Por ende, las construcciones categóricas en Finset son trasladables a Finord.

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Proposición

Si $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son topos, entonces $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ es un topos.

Demostración.

Sea $D : \mathcal{I} \to \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ un diagrama finito, entonces $D_i := P_i \circ D : \mathcal{I} \to \mathcal{E}_i$ es un diagrama finito para $i \in \{1, 2\}$. Ya que $\mathcal{E}_i$ es un topos, existe el límite $\langle \lim D_i, \varphi_{x_i} \rangle$ de D_i. Se asevera que la pareja $\langle (\lim D_1, \lim D_2), (\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}) \rangle$ es el límite de D. De igual manera la pareja $\langle \mathcal{P}(A_1), \mathcal{P}(A_2) \rangle$ es el correspondiente potencia para $\langle A_1, A_2 \rangle \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$. □

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Proposición

Si $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son topos, entonces $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ es un topos.

Demostración.

Sea $D : \mathcal{I} \to \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ un diagrama finito, entonces $D_i := P_i \circ D : \mathcal{I} \to \mathcal{E}_i$ es un diagrama finito para $i \in \{1, 2\}$. Ya que $\mathcal{E}_i$ es un topos, existe el límite $\langle \lim D_i, \varphi_{x_i} \rangle$ de D_i. Se asevera que la pareja $\langle (\lim D_1, \lim D_2), (\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}) \rangle$ es el límite de D. De igual manera la pareja $\langle \mathcal{P}(A_1), \mathcal{P}(A_2) \rangle$ es el correspondiente potencia para $\langle A_1, A_2 \rangle \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$. □

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Proposición

Si $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son topos, entonces $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ es un topos.

Demostración.

Sea $D : \mathcal{I} \to \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ un diagrama finito, entonces $D_i := P_i \circ D : \mathcal{I} \to \mathcal{E}_i$ es un diagrama finito para $i \in \{1, 2\}$. Ya que $\mathcal{E}_i$ es un topos, existe el límite $\langle \lim D_i, \varphi_{x_i} \rangle$ de D_i. Se asevera que la pareja $\langle (\lim D_1, \lim D_2), (\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}) \rangle$ es el límite de D. De igual manera la pareja $\langle \mathcal{P}(A_1), \mathcal{P}(A_2) \rangle$ es el correspondiente potencia para $\langle A_1, A_2 \rangle \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$. □

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Sección 3
Categoría de Functores como un Topos

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ y Sub

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Con lo visto hasta ahora se podrá estudiar la categoría $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ siendo $\mathcal{C}$ también una categoría. El objetivo final de esta sección será probar precisamente que $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es un topos, es decir, que:

- $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es finitamente completa.
- Todo functor de $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ tiene un "functor potencia."

Para la primera parte estudiaremos algunas propiedaddes del functor evaluación. Una vez acabada dicha subsección enfocaremos el resto de nuestras energías a probar el enunciado anterior.

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición

Para $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías pequeñas, se define el bifunctor *evaluación* $\mathrm{Ev} : [\mathcal{C}, \mathcal{D}] \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ que se comporta como se indica a continuación:

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición

Para $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías pequeñas, se define el bifunctor *evaluación* $\mathrm{Ev} : [\mathcal{C}, \mathcal{D}] \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ que se comporta como se indica a continuación:

- En objetos: $\mathrm{Ev}(F, A) := F(A)$.

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición

Para $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías pequeñas, se define el bifunctor *evaluación* $\mathrm{Ev} : [\mathcal{C}, \mathcal{D}] \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ que se comporta como se indica a continuación:

- En objetos: $\mathrm{Ev}(F, A) := F(A)$.
- En morfismos: Para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ y $\eta \in [F, G]$, se define $\mathrm{Ev}(\eta, f) := G(f) \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ F(f)$.

Functor Evaluación

Definición

Para $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías pequeñas, se define el bifunctor *evaluación* $\mathrm{Ev} : [\mathcal{C}, \mathcal{D}] \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ que se comporta como se indica a continuación:

- En objetos: $\mathrm{Ev}(F, A) := F(A)$.
- En morfismos: Para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ y $\eta \in [F, G]$, se define $\mathrm{Ev}(\eta, f) := G(f) \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ F(f)$.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(A') & \xrightarrow[\eta_{A'}]{} & G(A') \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \\ \downarrow{\scriptstyle f} \\ A' \end{array}$$

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición

Más aun, por ser bifunctor, podemos asociar a cada $\mathcal{C}$-objeto A el *functor evaluación* asociado izquierdo o *functor evaluación relativo a* $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^a$, es decir, $\mathrm{Ev}(-, A) : [\mathcal{C}, \mathcal{D}] \to \mathcal{D}$ tal que:

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición

Más aun, por ser bifunctor, podemos asociar a cada $\mathcal{C}$-objeto A el *functor evaluación* asociado izquierdo o *functor evaluación relativo a* $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^a$, es decir, $\mathrm{Ev}(-, A) : [\mathcal{C}, \mathcal{D}] \to \mathcal{D}$ tal que:

- En objetos: $\mathrm{Ev}(-, A)(F) := F(A)$.

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición

Más aun, por ser bifunctor, podemos asociar a cada $\mathcal{C}$-objeto A el *functor evaluación* asociado izquierdo o *functor evaluación relativo a* $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$[a], es decir, $\mathrm{Ev}(-, A) : [\mathcal{C}, \mathcal{D}] \to \mathcal{D}$ tal que:

- En objetos: $\mathrm{Ev}(-, A)(F) := F(A)$.
- En morfismos: $\mathrm{Ev}(-, A)(\eta) := \eta_A$.

[a] Obsérvese que el functor asociado derecho $\mathrm{Ev}(F, -) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ coincide con el functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición

Más aun, por ser bifunctor, podemos asociar a cada $\mathcal{C}$-objeto A el *functor evaluación* asociado izquierdo o *functor evaluación relativo a* $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$[a], es decir, $\mathrm{Ev}(-, A) : [\mathcal{C}, \mathcal{D}] \to \mathcal{D}$ tal que:

- En objetos: $\mathrm{Ev}(-, A)(F) := F(A)$.
- En morfismos: $\mathrm{Ev}(-, A)(\eta) := \eta_A$.

[a] Obsérvese que el functor asociado derecho $\mathrm{Ev}(F, -) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ coincide con el functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(A') \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_A} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{A'}} \\ G(A) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(A') \end{array} \qquad \begin{array}{c} F \\ \downarrow{\scriptstyle \eta} \\ G \end{array}$$

Functor Evaluación

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Antes de proceder, recuérdese el siguiente resultado:

Lema (Evaluación puntual)

Dadas tres categorías $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ y $\mathcal{C}$, y un bifunctor (diagrama) $D : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Si para cada $\mathcal{J}$-objeto j, el functor asociado izquierdo $D(-, j) : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ tiene límite $(L_j, \langle l_i^j \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle)$, entonces:

- *Existe un único functor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ tal que para cada $j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$, $F(j) = L_j$, y para $m : j \to_{\mathcal{J}} j'$ e $i \in \mathcal{I}$, conmuta el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} F(j) = L_j & \xrightarrow{l_i^j} & D(i,j) \\ {\scriptstyle F(m)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D(i,m)} \\ F(j') = L_{j'} & \xrightarrow{l_i^{j'}} & D(i,j') \end{array}$$

Functor Evaluación

Antes de proceder, recuérdese el siguiente resultado:

Lema (Evaluación puntual)

Dadas tres categorías $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ y $\mathcal{C}$, y un bifunctor (diagrama) $D : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Si para cada $\mathcal{J}$-objeto j, el functor asociado izquierdo $D(-, j) : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ tiene límite $(L_j, \langle l_i^j \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle)$, entonces:

- *Existe un único functor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ tal que para cada $j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$, $F(j) = L_j$, y para $m : j \to_{\mathcal{J}} j'$ e $i \in \mathcal{I}$, conmuta el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} F(j) = L_j & \xrightarrow{l_i^j} & D(i,j) \\ {\scriptstyle F(m)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D(i,m)} \\ F(j') = L_{j'} & \xrightarrow{l_i^{j'}} & D(i,j') \end{array}$$

Functor Evaluación

Antes de proceder, recuérdese el siguiente resultado:

Lema (Evaluación puntual)

Dadas tres categorías $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ y $\mathcal{C}$, y un bifunctor (diagrama) $D : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Si para cada $\mathcal{J}$-objeto j, el functor asociado izquierdo $D(-, j) : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ tiene límite $(L_j, \langle l_i^j \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle)$, entonces:

- *Existe un único functor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ tal que para cada $j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$, $F(j) = L_j$, y para $m : j \to_{\mathcal{J}} j'$ e $i \in \mathcal{I}$, conmuta el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} F(j) = L_j & \xrightarrow{l_i^j} & D(i,j) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle F(m)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle D(i,m)} \\ F(j') = L_{j'} & \xrightarrow{l_i^{j'}} & D(i,j') \end{array}$$

Functor Evaluación

Antes de proceder, recuérdese el siguiente resultado:

Lema (Evaluación puntual)

Dadas tres categorías $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ y $\mathcal{C}$, y un bifunctor (diagrama) $D : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Si para cada $\mathcal{J}$-objeto j, el functor asociado izquierdo $D(-, j) : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ tiene límite $(L_j, \langle l_i^j \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle)$, entonces:

- *Existe un único functor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ tal que para cada $j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$, $F(j) = L_j$, y para $m : j \to_{\mathcal{J}} j'$ e $i \in \mathcal{I}$, conmuta el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} F(j) = L_j & \xrightarrow{l_i^j} & D(i,j) \\ {\scriptstyle F(m)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D(i,m)} \\ F(j') = L_{j'} & \xrightarrow{l_i^{j'}} & D(i,j') \end{array}$$

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

- $(L, \langle p_j \mid j \in \mathcal{J} \rangle)$ es límite de F si y sólo si $(L, \langle l_i^j \circ p_j \mid j \in \mathcal{J} \wedge i \in \mathcal{I} \rangle)$ es el límite de D.

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

- $(L, \langle p_j \mid j \in \mathcal{J} \rangle)$ es límite de F si y sólo si $(L, \langle l_i^j \circ p_j \mid j \in \mathcal{J} \wedge i \in \mathcal{I} \rangle)$ es el límite de D.

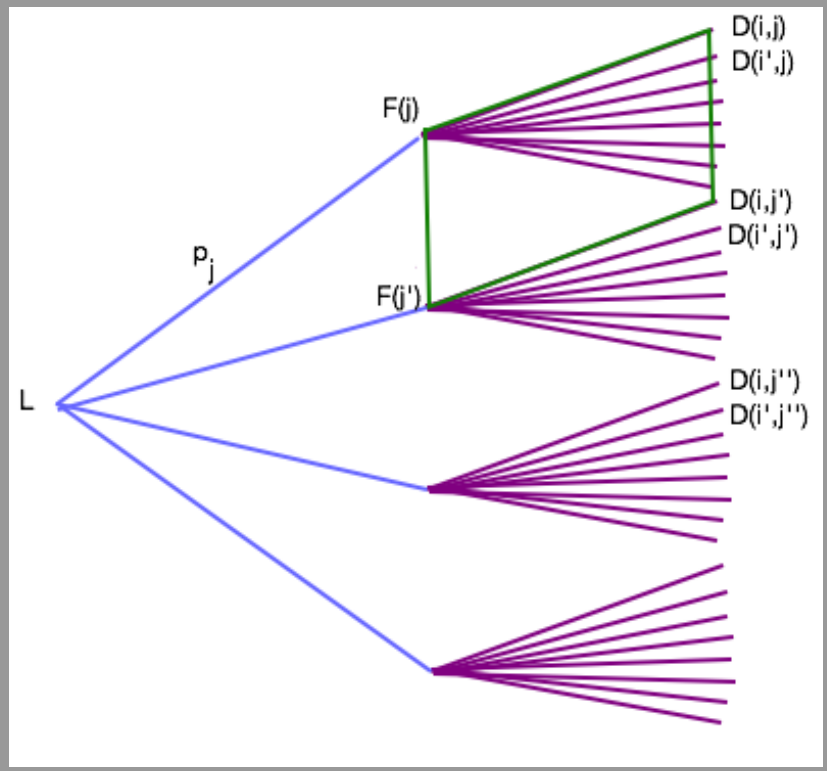
Gráficamente lo anterior se representa en:

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

- $(L, \langle p_j \mid j \in \mathcal{J} \rangle)$ es límite de F si y sólo si $(L, \langle l_i^j \circ p_j \mid j \in \mathcal{J} \wedge i \in \mathcal{I} \rangle)$ es el límite de D.

Gráficamente lo anterior se representa en:



Functor Evaluación

Obsérvese que como corolario a este resultado se tiene que si $\mathcal{C}$ es $\mathcal{I}$-completa y $\mathcal{J}$-completa (existen $\mathcal{C}$-límites sobre diagramas con dominio $\mathcal{J}$ ó $\mathcal{I}$), entonces $\mathcal{C}$ es también $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$-completa.
Esto se debe a que para un diagrama D de $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ en $\mathcal{C}$, $D(-, j) : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ tiene límite (por hipótesis) y, por lo anterior, existe un único diagrama $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ que, por $\mathcal{I}$-completez, también tiene límite, ergo D tiene límite.
Aunado a este corolario, también se tiene como consecuencia al lema anterior la siguiente propiedad del functor evaluación:

Teorema

Sea $D : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ un diagrama y para $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ denótese por E_A a $\mathrm{Ev}(\text{-}, \mathrm{A}) : [\mathcal{C}, \mathcal{D}] \to \mathcal{D}$. Si el límite de $E_A \circ D : \mathcal{I} \to \mathcal{D}$ es $(L_A, \langle I_i^A \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle)$ para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, entonces $\lim(E_A \circ D) = E_A(\lim D)$

Functor Evaluación

Obsérvese que como corolario a este resultado se tiene que si $\mathcal{C}$ es $\mathcal{I}$-completa y $\mathcal{J}$-completa (existen $\mathcal{C}$-límites sobre diagramas con dominio $\mathcal{J}$ ó $\mathcal{I}$), entonces $\mathcal{C}$ es también $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$-completa. Esto se debe a que para un diagrama D de $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ en $\mathcal{C}$, $D(-, j) : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ tiene límite (por hipótesis) y, por lo anterior, existe un único diagrama $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ que, por $\mathcal{I}$-completez, también tiene límite, ergo D tiene límite.

Aunado a este corolario, también se tiene como consecuencia al lema anterior la siguiente propiedad del functor evaluación:

Teorema

Sea $D : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ un diagrama y para $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ denótese por E_A a $\mathrm{Ev}(\text{-}, \mathrm{A}) : [\mathcal{C}, \mathcal{D}] \to \mathcal{D}$. Si el límite de $E_A \circ D : \mathcal{I} \to \mathcal{D}$ es $(L_A, \langle I_i^A \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle)$ para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, entonces $\varprojlim(E_A \circ D) = E_A(\varprojlim D)$

Functor Evaluación

Obsérvese que como corolario a este resultado se tiene que si $\mathcal{C}$ es $\mathcal{I}$-completa y $\mathcal{J}$-completa (existen $\mathcal{C}$-límites sobre diagramas con dominio $\mathcal{J}$ ó $\mathcal{I}$), entonces $\mathcal{C}$ es también $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$-completa. Esto se debe a que para un diagrama D de $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ en $\mathcal{C}$, $D(-, j) : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ tiene límite (por hipótesis) y, por lo anterior, existe un único diagrama $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ que, por $\mathcal{I}$-completez, también tiene límite, ergo D tiene límite.
Aunado a este corolario, también se tiene como consecuencia al lema anterior la siguiente propiedad del functor evaluación:

Teorema

Sea $D : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ un diagrama y para $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ denótese por E_A a $\mathrm{Ev}(\text{-}, \mathrm{A}) : [\mathcal{C}, \mathcal{D}] \to \mathcal{D}$. Si el límite de $E_A \circ D : \mathcal{I} \to \mathcal{D}$ es $(L_A, \langle I_i^A \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle)$ para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, entonces $\lim(E_A \circ D) = E_A(\lim D)$

Functor Evaluación

Obsérvese que como corolario a este resultado se tiene que si $\mathcal{C}$ es $\mathcal{I}$-completa y $\mathcal{J}$-completa (existen $\mathcal{C}$-límites sobre diagramas con dominio $\mathcal{J}$ ó $\mathcal{I}$), entonces $\mathcal{C}$ es también $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$-completa. Esto se debe a que para un diagrama D de $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ en $\mathcal{C}$, $D(-, j) : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ tiene límite (por hipótesis) y, por lo anterior, existe un único diagrama $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ que, por $\mathcal{I}$-completez, también tiene límite, ergo D tiene límite.
Aunado a este corolario, también se tiene como consecuencia al lema anterior la siguiente propiedad del functor evaluación:

Teorema

Sea $D : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ *un diagrama y para* $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *denótese por* E_A *a* $\mathrm{Ev}(\text{-}, \mathrm{A}) : [\mathcal{C}, \mathcal{D}] \to \mathcal{D}$. *Si el límite de* $E_A \circ D : \mathcal{I} \to \mathcal{D}$ *es* $(L_A, \langle l_i^A \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle)$ *para cada* $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, *entonces* $\varprojlim(E_A \circ D) = E_A(\varprojlim D)$

Functor Evaluación

Demostración.

Obsérvese que para $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, se cumple que $I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, (E_A \circ D)(i)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i)(A)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i, A))$ pues $D \in [\mathcal{I}, [\mathcal{C}, \mathcal{D}]] \cong [\mathcal{I} \times \mathcal{C}, \mathcal{D}]$. Por el lema anterior, ya que $D(-, A)$ tiene límite, éste coincide con el del único functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} : A \mapsto L_A$. Por lo que

$$\begin{aligned}
&\lim(E_A \circ D) = (L_A, \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}(L_A, E_A \circ D(i)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= (L_A, \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i, A)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= (F(A), \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), D(i, A)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(F, \langle I_i \in [F, D(i, -)] \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(F, \langle I_i \in [F, D_i] \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(\lim D).
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad se verifica con argumentos estándar mediante el diagrama: □

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Demostración.

Obsérvese que para $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, se cumple que $I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, (E_A \circ D)(i)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i)(A)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i, A))$ pues $D \in [\mathcal{I}, [\mathcal{C}, \mathcal{D}]] \cong [\mathcal{I} \times \mathcal{C}, \mathcal{D}]$. Por el lema anterior, ya que $D(-, A)$ tiene límite, éste coincide con el del único functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} : A \mapsto L_A$. Por lo que

$$\begin{aligned}
\lim(E_A \circ D) &= (L_A, \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}(L_A, E_A \circ D(i)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= (L_A, \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i, A)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= (F(A), \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), D(i, A)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(F, \langle I_i \in [F, D(i, -)] \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(F, \langle I_i \in [F, D_i] \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(\lim D).
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad se verifica con argumentos estándar mediante el diagrama: □

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Demostración.

Obsérvese que para $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, se cumple que $I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, (E_A \circ D)(i)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i)(A)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i, A))$ pues $D \in [\mathcal{I}, [\mathcal{C}, \mathcal{D}]] \cong [\mathcal{I} \times \mathcal{C}, \mathcal{D}]$. Por el lema anterior, ya que $D(-, A)$ tiene límite, éste coincide con el del único functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} : A \mapsto L_A$. Por lo que

$$\begin{aligned}
&\lim(E_A \circ D) = (L_A, \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}(L_A, E_A \circ D(i)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= (L_A, \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i, A)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= (F(A), \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), D(i, A)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(F, \langle I_i \in [F, D(i, -)] \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(F, \langle I_i \in [F, D_i] \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(\lim D).
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad se verifica con argumentos estándar mediante el diagrama: □

Functor Evaluación

Demostración.

Obsérvese que para $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, se cumple que $I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, (E_A \circ D)(i)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i)(A)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i, A))$ pues $D \in [\mathcal{I}, [\mathcal{C}, \mathcal{D}]] \cong [\mathcal{I} \times \mathcal{C}, \mathcal{D}]$. Por el lema anterior, ya que $D(-, A)$ tiene límite, éste coincide con el del único functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} : A \mapsto L_A$. Por lo que

$$\begin{aligned}
&\lim(E_A \circ D) = (L_A, \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}(L_A, E_A \circ D(i)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= (L_A, \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i, A)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= (F(A), \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), D(i, A)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(F, \langle I_i \in [F, D(i, -)] \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(F, \langle I_i \in [F, D_i] \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(\lim D).
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad se verifica con argumentos estándar mediante el diagrama: □

Functor Evaluación

Demostración.

Obsérvese que para $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, se cumple que $I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, (E_A \circ D)(i)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i)(A)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i, A))$ pues $D \in [\mathcal{I}, [\mathcal{C}, \mathcal{D}]] \cong [\mathcal{I} \times \mathcal{C}, \mathcal{D}]$. Por el lema anterior, ya que $D(-, A)$ tiene límite, éste coincide con el del único functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} : A \mapsto L_A$. Por lo que

$$\begin{aligned}
&\lim(E_A \circ D) = (L_A, \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}(L_A, E_A \circ D(i)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= (L_A, \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i, A)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= (F(A), \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), D(i, A)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(F, \langle I_i \in [F, D(i, -)] \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(F, \langle I_i \in [F, D_i] \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(\lim D).
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad se verifica con argumentos estándar mediante el diagrama: □

Functor Evaluación

Demostración.

Obsérvese que para $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, se cumple que $I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, (E_A \circ D)(i)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i)(A)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i, A))$ pues $D \in [\mathcal{I}, [\mathcal{C}, \mathcal{D}]] \cong [\mathcal{I} \times \mathcal{C}, \mathcal{D}]$. Por el lema anterior, ya que $D(-, A)$ tiene límite, éste coincide con el del único functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} : A \mapsto L_A$. Por lo que

$$\begin{aligned}
&\lim(E_A \circ D) = (L_A, \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}(L_A, E_A \circ D(i)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= (L_A, \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i, A)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= (F(A), \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), D(i, A)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(F, \langle I_i \in [F, D(i, -)] \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(F, \langle I_i \in [F, D_i] \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(\lim D).
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad se verifica con argumentos estándar mediante el diagrama: □

Functor Evaluación

Demostración.

Obsérvese que para $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, se cumple que $I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, (E_A \circ D)(i)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i)(A)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i,A))$ pues $D \in [\mathcal{I}, [\mathcal{C}, \mathcal{D}]] \cong [\mathcal{I} \times \mathcal{C}, \mathcal{D}]$. Por el lema anterior, ya que $D(-, A)$ tiene límite, éste coincide con el del único functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} : A \mapsto L_A$. Por lo que

$$\begin{aligned}
&\lim(E_A \circ D) = (L_A, \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}(L_A, E_A \circ D(i)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= (L_A, \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L_A, D(i,A)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= (F(A), \langle I_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), D(i,A)) \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(F, \langle I_i \in [F, D(i,-)] \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(F, \langle I_i \in [F, D_i] \mid i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})\rangle) \\
&= E_A(\lim D).
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad se verifica con argumentos estándar mediante el diagrama: □

Functor Evaluación

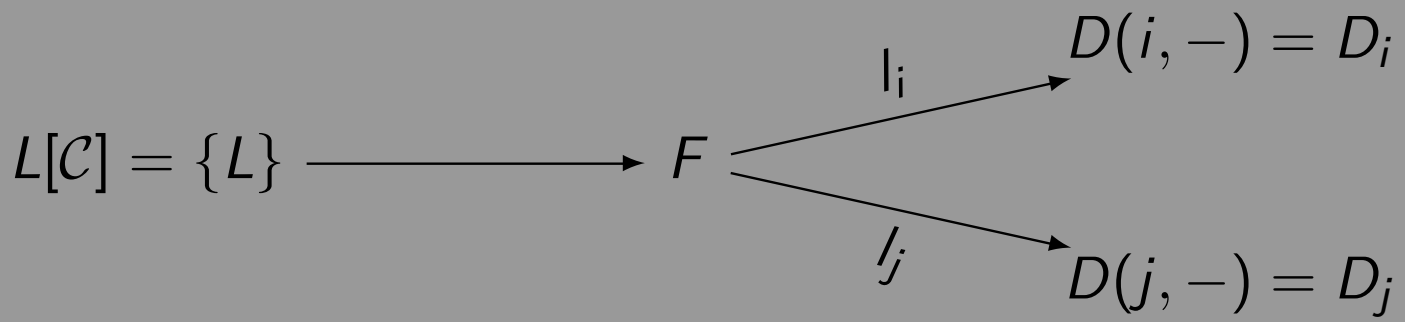
Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Demostración.

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Demostración.

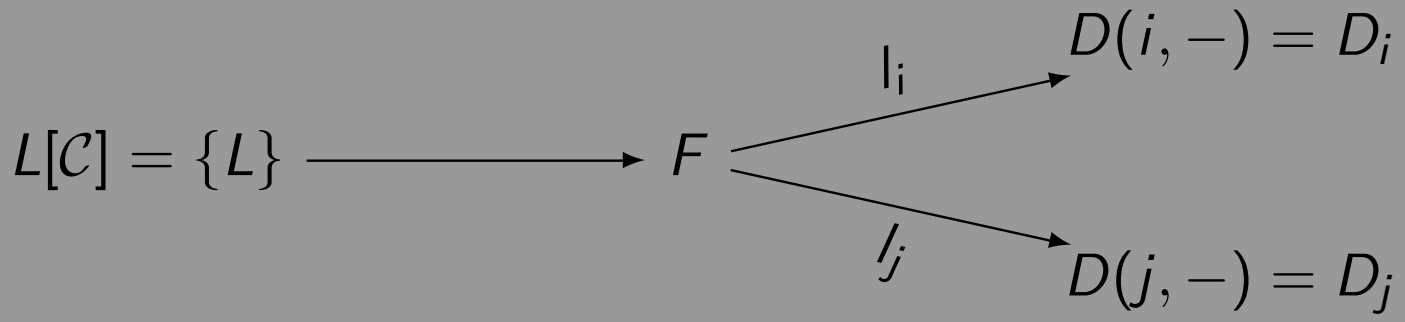


□

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Demostración.



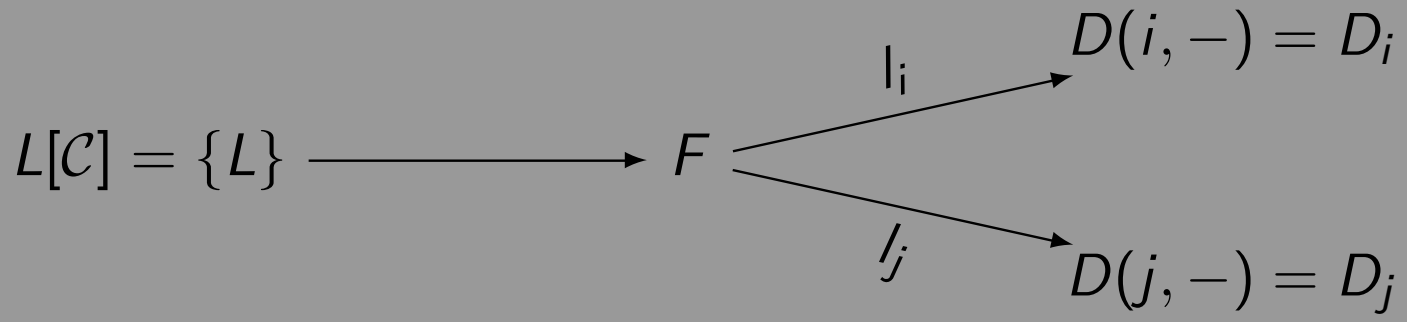
□

De esta manera, siempre que se tenga algún functor $D \in [\mathcal{I}, [\mathcal{C}, \mathcal{D}]]$, si se prueba que para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ el límite de $E_A \circ D$ es (L_A, l_i^A),

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Demostración.



□

De esta manera, siempre que se tenga algún functor $D \in [\mathcal{I}, [\mathcal{C}, \mathcal{D}]]$, si se prueba que para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ el límite de $E_A \circ D$ es (L_A, l_i^A), entonces el límite de D es la pareja $(F, \langle l_i \rangle_{i \in \mathcal{I}})$ con $F \in [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ tal que $F(A) = L_A$ y $\langle l_i^A \rangle_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ es transformación natural de F en $D(i)$. De lo anterior se obtienen los siguientes tres resultados:

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Corolario

Si $\mathcal{D}$ es $\mathcal{I}$-completa, entonces $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ es $\mathcal{I}$-completa.

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Corolario

Si $\mathcal{D}$ es $\mathcal{I}$-completa, entonces $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ es $\mathcal{I}$-completa.

Corolario

Para cualquier categoría $\mathcal{C}$, como Set es $\mathcal{I}$-completa, $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es $\mathcal{I}$-completa.

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Corolario

Si $\mathcal{D}$ es $\mathcal{I}$-completa, entonces $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ es $\mathcal{I}$-completa.

Corolario

Para cualquier categoría $\mathcal{C}$, como Set es $\mathcal{I}$-completa, $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es $\mathcal{I}$-completa.

Proposición

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Corolario

Si $\mathcal{D}$ es $\mathcal{I}$-completa, entonces $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ es $\mathcal{I}$-completa.

Corolario

Para cualquier categoría $\mathcal{C}$, como Set es $\mathcal{I}$-completa, $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es $\mathcal{I}$-completa.

Proposición

- $E_A := \mathrm{Ev}(-, A) : [\mathcal{C}, \mathcal{D}] \to \mathcal{D}$ *preserva límites y colímites para cada* $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Functor Evaluación

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Corolario

Si $\mathcal{D}$ es $\mathcal{I}$-completa, entonces $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ es $\mathcal{I}$-completa.

Corolario

Para cualquier categoría $\mathcal{C}$, como Set es $\mathcal{I}$-completa, $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es $\mathcal{I}$-completa.

Proposición

- $E_A := \mathrm{Ev}(-, A) : [\mathcal{C}, \mathcal{D}] \to \mathcal{D}$ *preserva límites y colímites para cada* $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
- $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ *es completa y cocompleta.*

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Obsérvese que, como consecuencia de la última proposición, $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es finitamente completa.

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Obsérvese que, como consecuencia de la última proposición, $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es finitamente completa. Por ende sólo resta probar que todo functor de $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ tiene un "functor potencia."

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Obsérvese que, como consecuencia de la última proposición, $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es finitamente completa. Por ende sólo resta probar que todo functor de $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ tiene un "functor potencia." En otras palabras debemos probar que para cada objeto $E \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ existe otro $\mathcal{P}(E)$, llamado el *potencia de* E, que representa al functor $\mathrm{Sub}(- \times E) : [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}] \to \mathrm{Set}$.

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Obsérvese que, como consecuencia de la última proposición, $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es finitamente completa. Por ende sólo resta probar que todo functor de $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ tiene un "functor potencia." En otras palabras debemos probar que para cada objeto $E \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ existe otro $\mathcal{P}(E)$, llamado el *potencia de* E, que representa al functor $\mathrm{Sub}(- \times E) : [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}] \to \mathrm{Set}$. Más específicamente, que existe una pareja $\langle \mathcal{P}(E), \delta \rangle$, con δ transformación natural que hace isomorfos a $\mathrm{Sub}(- \times E)$ y a $\mathrm{Hom}_{[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]}(-, \mathcal{P}(E)) = [-, \mathcal{P}(E)]$.

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Obsérvese que, como consecuencia de la última proposición, $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es finitamente completa. Por ende sólo resta probar que todo functor de $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ tiene un "functor potencia." En otras palabras debemos probar que para cada objeto $E \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ existe otro $\mathcal{P}(E)$, llamado el *potencia de* E, que representa al functor $\mathrm{Sub}(- \times E) : [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}] \to \mathrm{Set}$. Más específicamente, que existe una pareja $\langle \mathcal{P}(E), \delta \rangle$, con δ transformación natural que hace isomorfos a $\mathrm{Sub}(- \times E)$ y a $\mathrm{Hom}_{[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]}(-, \mathcal{P}(E)) = [-, \mathcal{P}(E)]$. Con dicha idea en mente, nuestro candidato a ser *potencia* de E es un functor $\mathcal{P}(E) \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ tal que:

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Obsérvese que, como consecuencia de la última proposición, $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es finitamente completa. Por ende sólo resta probar que todo functor de $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ tiene un "functor potencia." En otras palabras debemos probar que para cada objeto $E \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ existe otro $\mathcal{P}(E)$, llamado el *potencia de* E, que representa al functor $\mathrm{Sub}(- \times E) : [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}] \to \mathrm{Set}$. Más específicamente, que existe una pareja $\langle \mathcal{P}(E), \delta \rangle$, con δ transformación natural que hace isomorfos a $\mathrm{Sub}(- \times E)$ y a $\mathrm{Hom}_{[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]}(-, \mathcal{P}(E)) = [-, \mathcal{P}(E)]$. Con dicha idea en mente, nuestro candidato a ser *potencia* de E es un functor $\mathcal{P}(E) \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ tal que:

- En objetos: $\mathcal{P}(E)(A) := \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \times E)$, es decir, el conjunto de subfunctores de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \times E$.

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

- En morfismos: Para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V)$, se tiene que $\mathcal{P}(E)(f) : \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U) \times E) \to \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, V) \times E)$

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

- En morfismos: Para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V)$, se tiene que $\mathcal{P}(E)(f) : \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U) \times E) \to \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, V) \times E)$ definido por $\mathcal{P}(E)(f)([R]) := [R']$ para cada $R \subseteq_{[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U) \times E$.

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

- En morfismos: Para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V)$, se tiene que $\mathcal{P}(E)(f) : \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U) \times E) \to \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, V) \times E)$ definido por $\mathcal{P}(E)(f)([R]) := [R']$ para cada $R \subseteq_{[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U) \times E$. Siendo $R' \subseteq_{[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, V) \times E$

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

- En morfismos: Para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V)$, se tiene que $\mathcal{P}(E)(f) : \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U) \times E) \to \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, V) \times E)$ definido por $\mathcal{P}(E)(f)([R]) := [R']$ para cada $R \subseteq_{[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U) \times E$. Siendo $R' \subseteq_{[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, V) \times E$ de tal modo que $R'(X) := \{\langle f \circ h, x\rangle \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, V) \times E(X) \mid \langle h, x\rangle \in R(X)\}$.

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

- En morfismos: Para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V)$, se tiene que $\mathcal{P}(E)(f) : \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U) \times E) \to \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, V) \times E)$ definido por $\mathcal{P}(E)(f)([R]) := [R']$ para cada $R \subseteq_{[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U) \times E$. Siendo $R' \subseteq_{[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, V) \times E$ de tal modo que $R'(X) := \{\langle f \circ h, x\rangle \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, V) \times E(X) \mid \langle h, x\rangle \in R(X)\}$.

Se verifica que esto es un functor de $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$.

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

- En morfismos: Para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V)$, se tiene que $\mathcal{P}(E)(f) : \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U) \times E) \to \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, V) \times E)$ definido por $\mathcal{P}(E)(f)([R]) := [R']$ para cada $R \subseteq_{[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U) \times E$. Siendo $R' \subseteq_{[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, V) \times E$ de tal modo que $R'(X) := \{\langle f \circ h, x\rangle \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, V) \times E(X) \mid \langle h, x\rangle \in R(X)\}$.

Se verifica que esto es un functor de $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$.
Posteriormente, recuérdese que por el lema de Yoneda se tiene un isomorfismo natural entre el functor evaluación $\mathrm{Ev} : (G, A) \mapsto G(A)$ y el functor $(G, A) \mapsto [\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), G]$, ambos functores de tipo $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}] \times \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$.

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

- En morfismos: Para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V)$, se tiene que $\mathcal{P}(E)(f) : \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U) \times E) \to \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, V) \times E)$ definido por $\mathcal{P}(E)(f)([R]) := [R']$ para cada $R \subseteq_{[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U) \times E$. Siendo $R' \subseteq_{[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, V) \times E$ de tal modo que $R'(X) := \{\langle f \circ h, x\rangle \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, V) \times E(X) \mid \langle h, x\rangle \in R(X)\}$.

Se verifica que esto es un functor de $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Posteriormente, recuérdese que por el lema de Yoneda se tiene un isomorfismo natural entre el functor evaluación $\mathrm{Ev} : (G, A) \mapsto G(A)$ y el functor $(G, A) \mapsto [\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), G]$, ambos functores de tipo $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}] \times \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$. De esto se obtiene que $[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \mathcal{P}(E)] \cong \mathrm{Ev}(\mathcal{P}(E), A) = \mathcal{P}(E)(A) = \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \times E)$.

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

- En morfismos: Para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V)$, se tiene que $\mathcal{P}(E)(f) : \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U) \times E) \to \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, V) \times E)$ definido por $\mathcal{P}(E)(f)([R]) := [R']$ para cada $R \subseteq_{[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U) \times E$. Siendo $R' \subseteq_{[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, V) \times E$ de tal modo que $R'(X) := \{\langle f \circ h, x\rangle \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, V) \times E(X) \mid \langle h, x\rangle \in R(X)\}$.

Se verifica que esto es un functor de $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$.
Posteriormente, recuérdese que por el lema de Yoneda se tiene un isomorfismo natural entre el functor evaluación $\mathrm{Ev} : (G, A) \mapsto G(A)$ y el functor $(G, A) \mapsto [\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), G]$, ambos functores de tipo $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}] \times \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$. De esto se obtiene que $[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \mathcal{P}(E)] \cong \mathrm{Ev}(\mathcal{P}(E), A) = \mathcal{P}(E)(A)$ $= \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \times E)$.
En resumen: $\mathrm{Sub}(- \times E) \cong [-, \mathcal{P}(E)]$ cuando en vez del guión se escribe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$.

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Sólo resta extender este isomorfismo natural para el resto de los functores $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Para ello se usarán los siguientes dos resultados:

Lema

Dado un diagrama $D : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ *se cumple que* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Colim}\, D) = \lim(\mathrm{Sub}\, D)$

Demostración.

Denotemos al colímte de D por $(\langle \alpha_i \rangle_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}, F)$, entonces para $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j)$ se tiene que $\alpha_i = \alpha_j \circ D(m)$. De aquí que $\mathrm{Sub}(\alpha_i) = \mathrm{Sub}(\alpha_j \circ D(m)) = \mathrm{Sub}(D(m)) \circ \mathrm{Sub}(\alpha_j)$. Es decir, el cocono inducido por el colímite en $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ se volvió un cono en Set al aplicarle el functor Sub. De aquí se tiene una función mediadora μ de $\mathrm{Sub}(F)$ a $\lim \mathrm{Sub}(D)$. Por otro lado, dada □

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Sólo resta extender este isomorfismo natural para el resto de los functores $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Para ello se usarán los siguientes dos resultados:

Lema

Dado un diagrama $D : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ *se cumple que* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Colim}\, D) = \lim(\mathrm{Sub}\, D)$

Demostración.

Denotemos al colímte de D por $(\langle \alpha_i \rangle_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}, F)$, entonces para $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j)$ se tiene que $\alpha_i = \alpha_j \circ D(m)$. De aquí que $\mathrm{Sub}(\alpha_i) = \mathrm{Sub}(\alpha_j \circ D(m)) = \mathrm{Sub}(D(m)) \circ \mathrm{Sub}(\alpha_j)$. Es decir, el cocono inducido por el colímite en $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ se volvió un cono en Set al aplicarle el functor Sub. De aquí se tiene una función mediadora μ de $\mathrm{Sub}(F)$ a $\lim \mathrm{Sub}(D)$. Por otro lado, dada □

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Sólo resta extender este isomorfismo natural para el resto de los functores $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Para ello se usarán los siguientes dos resultados:

Lema

Dado un diagrama $D : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ *se cumple que* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Colim}\, D) = \lim(\mathrm{Sub}\, D)$

Demostración.

Denotemos al colímte de D por $(\langle \alpha_i \rangle_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}, F)$, entonces para $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j)$ se tiene que $\alpha_i = \alpha_j \circ D(m)$. De aquí que $\mathrm{Sub}(\alpha_i) = \mathrm{Sub}(\alpha_j \circ D(m)) = \mathrm{Sub}(D(m)) \circ \mathrm{Sub}(\alpha_j)$. Es decir, el cocono inducido por el colímite en $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ se volvió un cono en Set al aplicarle el functor Sub. De aquí se tiene una función mediadora μ de $\mathrm{Sub}(F)$ a $\lim \mathrm{Sub}(D)$. Por otro lado, dada

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Sólo resta extender este isomorfismo natural para el resto de los functores $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Para ello se usarán los siguientes dos resultados:

Lema

Dado un diagrama $D : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ *se cumple que* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Colim}\, D) = \lim(\mathrm{Sub}\, D)$

Demostración.

Denotemos al colímte de D por $(\langle \alpha_i \rangle_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}, F)$, entonces para $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j)$ se tiene que $\alpha_i = \alpha_j \circ D(m)$. De aquí que $\mathrm{Sub}(\alpha_i) = \mathrm{Sub}(\alpha_j \circ D(m)) = \mathrm{Sub}(D(m)) \circ \mathrm{Sub}(\alpha_j)$. Es decir, el cocono inducido por el colímite en $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ se volvió un cono en Set al aplicarle el functor Sub. De aquí se tiene una función mediadora μ de $\mathrm{Sub}(F)$ a $\lim \mathrm{Sub}(D)$. Por otro lado, dada □

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Sólo resta extender este isomorfismo natural para el resto de los functores $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Para ello se usarán los siguientes dos resultados:

Lema

Dado un diagrama $D : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ *se cumple que* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Colim}\, D) = \lim(\mathrm{Sub}\, D)$

Demostración.

Denotemos al colímte de D por $(\langle \alpha_i \rangle_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}, F)$, entonces para $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j)$ se tiene que $\alpha_i = \alpha_j \circ D(m)$. De aquí que $\mathrm{Sub}(\alpha_i) = \mathrm{Sub}(\alpha_j \circ D(m)) = \mathrm{Sub}(D(m)) \circ \mathrm{Sub}(\alpha_j)$. Es decir, el cocono inducido por el colímite en $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ se volvió un cono en Set al aplicarle el functor Sub. De aquí se tiene una función mediadora μ de $\mathrm{Sub}(F)$ a $\lim \mathrm{Sub}(D)$. Por otro lado, dada □

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Sólo resta extender este isomorfismo natural para el resto de los functores $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Para ello se usarán los siguientes dos resultados:

Lema

Dado un diagrama $D : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ *se cumple que* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Colim}\, D) = \lim(\mathrm{Sub}\, D)$

Demostración.

Denotemos al colímte de D por $(\langle \alpha_i \rangle_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}, F)$, entonces para $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j)$ se tiene que $\alpha_i = \alpha_j \circ D(m)$. De aquí que $\mathrm{Sub}(\alpha_i) = \mathrm{Sub}(\alpha_j \circ D(m)) = \mathrm{Sub}(D(m)) \circ \mathrm{Sub}(\alpha_j)$. Es decir, el cocono inducido por el colímite en $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ se volvió un cono en Set al aplicarle el functor Sub. De aquí se tiene una función mediadora μ de $\mathrm{Sub}(F)$ a $\lim \mathrm{Sub}(D)$. Por otro lado, dada □

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Sólo resta extender este isomorfismo natural para el resto de los functores $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Para ello se usarán los siguientes dos resultados:

Lema

Dado un diagrama $D : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ *se cumple que* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Colim}\, D) = \lim(\mathrm{Sub}\, D)$

Demostración.

Denotemos al colímte de D por $(\langle \alpha_i \rangle_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}, F)$, entonces para $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j)$ se tiene que $\alpha_i = \alpha_j \circ D(m)$. De aquí que $\mathrm{Sub}(\alpha_i) = \mathrm{Sub}(\alpha_j \circ D(m)) = \mathrm{Sub}(D(m)) \circ \mathrm{Sub}(\alpha_j)$. Es decir, el cocono inducido por el colímite en $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ se volvió un cono en Set al aplicarle el functor Sub. De aquí se tiene una función mediadora μ de $\mathrm{Sub}(F)$ a $\lim \mathrm{Sub}(D)$. Por otro lado, dada □

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Sólo resta extender este isomorfismo natural para el resto de los functores $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Para ello se usarán los siguientes dos resultados:

Lema

Dado un diagrama $D : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ *se cumple que* $\mathrm{Sub}(\mathrm{Colim}\, D) = \lim(\mathrm{Sub}\, D)$

Demostración.

Denotemos al colímte de D por $(\langle \alpha_i \rangle_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}, F)$, entonces para $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j)$ se tiene que $\alpha_i = \alpha_j \circ D(m)$. De aquí que $\mathrm{Sub}(\alpha_i) = \mathrm{Sub}(\alpha_j \circ D(m)) = \mathrm{Sub}(D(m)) \circ \mathrm{Sub}(\alpha_j)$. Es decir, el cocono inducido por el colímite en $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ se volvió un cono en Set al aplicarle el functor Sub. De aquí se tiene una función mediadora μ de $\mathrm{Sub}(F)$ a $\lim \mathrm{Sub}(D)$. Por otro lado, dada □

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Demostración.

una familia de subfunctores compatibles $C(i) \subseteq_{[\mathcal{C}^{op},\mathrm{Set}]} D(i)$ con $i \in \mathcal{I}$, i.e. para cada $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,j)$:

$$\begin{array}{ccc} C(i) & \hookrightarrow & D(i) \\ \downarrow{\scriptstyle C(m)} & & \downarrow{\scriptstyle D(m)} \\ C(j) & \hookrightarrow & D(j) \end{array}$$

es un cuadrado *pullback*. Ya que el functor evaluación preserva colímites y éstos a su vez respetan monomorfismos en Set, al aplicar E_A al diagrama anterior respecto a cualquier $\mathcal{C}$-objeto A, se preservarán las relaciones del diagrama y, específicamente $E = \mathrm{Colim}(C) \hookrightarrow \mathrm{Colim}(D) = F$, es decir, $E \subseteq_{[\mathcal{C}^{op},\mathrm{Set}]} F$. En particular esto se vale para el límite de los subfunctores de D y, por lo tanto, $\varprojlim \mathrm{Sub}(D) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Sub}(F)$. Se respeta que las composiciones de μ y λ dan las identidades (pues lo hacen en Set). □

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Demostración.

una familia de subfunctores compatibles $C(i) \subseteq_{[\mathcal{C}^{op},\mathrm{Set}]} D(i)$ con $i \in \mathcal{I}$, i.e. para cada $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,j)$:

$$\begin{array}{ccc} C(i) & \hookrightarrow & D(i) \\ {\scriptstyle C(m)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D(m)} \\ C(j) & \hookrightarrow & D(j) \end{array}$$

es un cuadrado *pullback*. Ya que el functor evaluación preserva colímites y éstos a su vez respetan monomorfismos en Set, al aplicar E_A al diagrama anterior respecto a cualquier $\mathcal{C}$-objeto A, se preservarán las relaciones del diagrama y, específicamente $E = \mathrm{Colim}(C) \hookrightarrow \mathrm{Colim}(D) = F$, es decir, $E \subseteq_{[\mathcal{C}^{op},\mathrm{Set}]} F$. En particular esto se vale para el límite de los subfunctores de D y, por lo tanto, $\varprojlim \mathrm{Sub}(D) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Sub}(F)$. Se respeta que las composiciones de μ y λ dan las identidades (pues lo hacen en Set). □

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Demostración.

una familia de subfunctores compatibles $C(i) \subseteq_{[\mathcal{C}^{op},\mathrm{Set}]} D(i)$ con $i \in \mathcal{I}$, i.e. para cada $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,j)$:

$$\begin{array}{ccc} C(i) & \hookrightarrow & D(i) \\ {\scriptstyle C(m)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D(m)} \\ C(j) & \hookrightarrow & D(j) \end{array}$$

es un cuadrado *pullback*. Ya que el functor evaluación preserva colímites y éstos a su vez respetan monomorfismos en Set, al aplicar E_A al diagrama anterior respecto a cualquier $\mathcal{C}$-objeto A, se preservarán las relaciones del diagrama y, específicamente $E = \mathrm{Colim}(C) \hookrightarrow \mathrm{Colim}(D) = F$, es decir, $E \subseteq_{[\mathcal{C}^{op},\mathrm{Set}]} F$. En particular esto se vale para el límite de los subfunctores de D y, por lo tanto, $\varprojlim \mathrm{Sub}(D) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Sub}(F)$. Se respeta que las composiciones de μ y λ dan las identidades (pues lo hacen en Set). □

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Demostración.

una familia de subfunctores compatibles $C(i) \subseteq_{[\mathcal{C}^{op},\mathrm{Set}]} D(i)$ con $i \in \mathcal{I}$, i.e. para cada $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,j)$:

$$\begin{array}{ccc} C(i) & \hookrightarrow & D(i) \\ {\scriptstyle C(m)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D(m)} \\ C(j) & \hookrightarrow & D(j) \end{array}$$

es un cuadrado *pullback*. Ya que el functor evaluación preserva colímites y éstos a su vez respetan monomorfismos en Set, al aplicar E_A al diagrama anterior respecto a cualquier $\mathcal{C}$-objeto A, se preservarán las relaciones del diagrama y, específicamente $E = \mathrm{Colim}(C) \hookrightarrow \mathrm{Colim}(D) = F$, es decir, $E \subseteq_{[\mathcal{C}^{op},\mathrm{Set}]} F$. En particular esto se vale para el límite de los subfunctores de D y, por lo tanto, $\varprojlim \mathrm{Sub}(D) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Sub}(F)$. Se respeta que las composiciones de μ y λ dan las identidades (pues lo hacen en Set). □

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Demostración.

una familia de subfunctores compatibles $C(i) \subseteq_{[\mathcal{C}^{op},\mathrm{Set}]} D(i)$ con $i \in \mathcal{I}$, i.e. para cada $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,j)$:

$$\begin{array}{ccc} C(i) & \hookrightarrow & D(i) \\ {\scriptstyle C(m)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D(m)} \\ C(j) & \hookrightarrow & D(j) \end{array}$$

es un cuadrado *pullback*. Ya que el functor evaluación preserva colímites y éstos a su vez respetan monomorfismos en Set, al aplicar E_A al diagrama anterior respecto a cualquier $\mathcal{C}$-objeto A, se preservarán las relaciones del diagrama y, específicamente $E = \mathrm{Colim}(C) \hookrightarrow \mathrm{Colim}(D) = F$, es decir, $E \subseteq_{[\mathcal{C}^{op},\mathrm{Set}]} F$. En particular esto se vale para el límite de los subfunctores de D y, por lo tanto, $\varprojlim \mathrm{Sub}(D) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Sub}(F)$. Se respeta que las composiciones de μ y λ dan las identidades (pues lo hacen en Set). □

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Demostración.

una familia de subfunctores compatibles $C(i) \subseteq_{[\mathcal{C}^{op},\mathrm{Set}]} D(i)$ con $i \in \mathcal{I}$, i.e. para cada $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,j)$:

$$\begin{array}{ccc} C(i) & \hookrightarrow & D(i) \\ {\scriptstyle C(m)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D(m)} \\ C(j) & \hookrightarrow & D(j) \end{array}$$

es un cuadrado *pullback*. Ya que el functor evaluación preserva colímites y éstos a su vez respetan monomorfismos en Set, al aplicar E_A al diagrama anterior respecto a cualquier $\mathcal{C}$-objeto A, se preservarán las relaciones del diagrama y, específicamente $E = \mathrm{Colim}(C) \hookrightarrow \mathrm{Colim}(D) = F$, es decir, $E \subseteq_{[\mathcal{C}^{op},\mathrm{Set}]} F$. En particular esto se vale para el límite de los subfunctores de D y, por lo tanto, $\varprojlim \mathrm{Sub}(D) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Sub}(F)$. Se respeta que las composiciones de μ y λ dan las identidades (pues lo hacen en Set). □

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Lema

Para una categoría pequeña $\mathcal{C}$ y un functor $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, se cumple que F es el colímite de functores representables.

Demostración.

Deseamos hallar una colección de functores $\{F_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ tales que $F_i \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ para cada $i \in \mathcal{I}$ donde $\mathcal{I}$ es una categoría. Por el lema de Yoneda, $F(A) \cong [\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), F]$ para $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, lo que quiere decir que, con la categoría dominio adecuada, los $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ podrían ser nuestros F_i. Se verifica entonces que si $\mathrm{Ob}(\mathcal{I}) := \bigcup_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \{\langle A, a\rangle \mid a \in F(A)\}$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(\langle A, a\rangle, \langle B, b\rangle)$ es aquél $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ tal que $F(f)(b) = a$, entonces F es el colímite de $\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \mid \langle A, a\rangle \in \mathcal{I}\}$ □

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Lema

Para una categoría pequeña $\mathcal{C}$ y un functor $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, se cumple que F es el colímite de functores representables.

Demostración.

Deseamos hallar una colección de functores $\{F_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ tales que $F_i \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ para cada $i \in \mathcal{I}$ donde $\mathcal{I}$ es una categoría. Por el lema de Yoneda, $F(A) \cong [\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), F]$ para $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, lo que quiere decir que, con la categoría dominio adecuada, los $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ podrían ser nuestros F_i. Se verifica entonces que si $\mathrm{Ob}(\mathcal{I}) := \bigcup_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \{\langle A, a\rangle \mid a \in F(A)\}$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(\langle A, a\rangle, \langle B, b\rangle)$ es aquél $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ tal que $F(f)(b) = a$, entonces F es el colímite de $\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \mid \langle A, a\rangle \in \mathcal{I}\}$ □

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Lema

Para una categoría pequeña $\mathcal{C}$ y un functor $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, se cumple que F es el colímite de functores representables.

Demostración.

Deseamos hallar una colección de functores $\{F_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ tales que $F_i \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ para cada $i \in \mathcal{I}$ donde $\mathcal{I}$ es una categoría. Por el lema de Yoneda, $F(A) \cong [\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), F]$ para $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, lo que quiere decir que, con la categoría dominio adecuada, los $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ podrían ser nuestros F_i. Se verifica entonces que si $\mathrm{Ob}(\mathcal{I}) := \bigcup_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \{\langle A, a\rangle \mid a \in F(A)\}$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(\langle A, a\rangle, \langle B, b\rangle)$ es aquél $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ tal que $F(f)(b) = a$, entonces F es el colímite de $\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \mid \langle A, a\rangle \in \mathcal{I}\}$ □

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Lema

Para una categoría pequeña $\mathcal{C}$ y un functor $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, se cumple que F es el colímite de functores representables.

Demostración.

Deseamos hallar una colección de functores $\{F_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ tales que $F_i \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ para cada $i \in \mathcal{I}$ donde $\mathcal{I}$ es una categoría. Por el lema de Yoneda, $F(A) \cong [\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), F]$ para $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, lo que quiere decir que, con la categoría dominio adecuada, los $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ podrían ser nuestros F_i. Se verifica entonces que si $\mathrm{Ob}(\mathcal{I}) := \bigcup_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \{\langle A, a\rangle \mid a \in F(A)\}$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(\langle A, a\rangle, \langle B, b\rangle)$ es aquél $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ tal que $F(f)(b) = a$, entonces F es el colímite de $\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \mid \langle A, a\rangle \in \mathcal{I}\}$ □

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Lema

Para una categoría pequeña $\mathcal{C}$ y un functor $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, se cumple que F es el colímite de functores representables.

Demostración.

Deseamos hallar una colección de functores $\{F_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ tales que $F_i \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ para cada $i \in \mathcal{I}$ donde $\mathcal{I}$ es una categoría. Por el lema de Yoneda, $F(A) \cong [\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), F]$ para $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, lo que quiere decir que, con la categoría dominio adecuada, los $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ podrían ser nuestros F_i. Se verifica entonces que si $\mathrm{Ob}(\mathcal{I}) := \bigcup_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \{\langle A, a\rangle \mid a \in F(A)\}$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(\langle A, a\rangle, \langle B, b\rangle)$ es aquél $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ tal que $F(f)(b) = a$, entonces F es el colímite de $\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \mid \langle A, a\rangle \in \mathcal{I}\}$ □

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Finalmente, ya teníamos que

$$[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \mathcal{P}(E)] \cong \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \times E)$$

para cada $E \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. En general para otro $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, por el lema anterior, $F = \mathrm{Colim}\, A$ donde $A : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ y $A_i \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$ para algún $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
De aquí que:
$\mathrm{Sub}(F \times E) = \mathrm{Sub}(\mathrm{Colim}((- \times E) \circ A)) = \lim \mathrm{Sub}((- \times E) \circ A)$
$= \lim(Sub(A_i \times E)) \cong \lim[A_i, \mathcal{P}(E)] = [\mathrm{Colim}\, A_i, \mathcal{P}(E)]$
$= [F, \mathcal{P}(E)]$.
Por lo tanto $\mathrm{Sub}(F \times E) \cong [F, \mathcal{P}(E)]$ para $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Es decir: $\mathrm{Sub}(- \times E)$ es representable en $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$.
Con esto concluimos el resultado principal, pues hemos probado que $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es un topos.

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Finalmente, ya teníamos que

$$[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \mathcal{P}(E)] \cong \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \times E)$$

para cada $E \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. En general para otro $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, por el lema anterior, $F = \mathrm{Colim}\, A$ donde $A : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ y $A_i \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$ para algún $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
De aquí que:
$\mathrm{Sub}(F \times E) = \mathrm{Sub}(\mathrm{Colim}((- \times E) \circ A)) = \lim \mathrm{Sub}((- \times E) \circ A)$
$= \lim(Sub(A_i \times E)) \cong \lim[A_i, \mathcal{P}(E)] = [\mathrm{Colim}\, A_i, \mathcal{P}(E)]$
$= [F, \mathcal{P}(E)]$.
Por lo tanto $\mathrm{Sub}(F \times E) \cong [F, \mathcal{P}(E)]$ para $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Es decir: $\mathrm{Sub}(- \times E)$ es representable en $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$.
Con esto concluimos el resultado principal, pues hemos probado que $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es un topos.

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Finalmente, ya teníamos que

$$[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \mathcal{P}(E)] \cong \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \times E)$$

para cada $E \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. En general para otro $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, por el lema anterior, $F = \mathrm{Colim}\, A$ donde $A : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ y $A_i \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$ para algún $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

De aquí que:

$\mathrm{Sub}(F \times E) = \mathrm{Sub}(\mathrm{Colim}((- \times E) \circ A)) = \lim \mathrm{Sub}((- \times E) \circ A)$
$= \lim(Sub(A_i \times E)) \cong \lim[A_i, \mathcal{P}(E)] = [\mathrm{Colim}\, A_i, \mathcal{P}(E)]$
$= [F, \mathcal{P}(E)]$.

Por lo tanto $\mathrm{Sub}(F \times E) \cong [F, \mathcal{P}(E)]$ para $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Es decir: $\mathrm{Sub}(- \times E)$ es representable en $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$.

Con esto concluimos el resultado principal, pues hemos probado que $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es un topos.

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Finalmente, ya teníamos que

$$[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \mathcal{P}(E)] \cong \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \times E)$$

para cada $E \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. En general para otro $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, por el lema anterior, $F = \mathrm{Colim}\, A$ donde $A : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ y $A_i \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$ para algún $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
De aquí que:
$\mathrm{Sub}(F \times E) = \mathrm{Sub}(\mathrm{Colim}((- \times E) \circ A)) = \lim \mathrm{Sub}((- \times E) \circ A)$
$= \lim(Sub(A_i \times E)) \cong \lim[A_i, \mathcal{P}(E)] = [\mathrm{Colim}\, A_i, \mathcal{P}(E)]$
$= [F, \mathcal{P}(E)]$.
Por lo tanto $\mathrm{Sub}(F \times E) \cong [F, \mathcal{P}(E)]$ para $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Es decir: $\mathrm{Sub}(- \times E)$ es representable en $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$.
Con esto concluimos el resultado principal, pues hemos probado que $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es un topos.

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Finalmente, ya teníamos que

$$[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \mathcal{P}(E)] \cong \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \times E)$$

para cada $E \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. En general para otro $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, por el lema anterior, $F = \mathrm{Colim}\, A$ donde $A : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ y $A_i \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$ para algún $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
De aquí que:
$\mathrm{Sub}(F \times E) = \mathrm{Sub}(\mathrm{Colim}((- \times E) \circ A)) = \mathrm{lím}\, \mathrm{Sub}((- \times E) \circ A)$
$= \mathrm{lím}(Sub(A_i \times E)) \cong \mathrm{lím}[A_i, \mathcal{P}(E)] = [\mathrm{Colim}\, A_i, \mathcal{P}(E)]$
$= [F, \mathcal{P}(E)]$.
Por lo tanto $\mathrm{Sub}(F \times E) \cong [F, \mathcal{P}(E)]$ para $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Es decir: $\mathrm{Sub}(- \times E)$ es representable en $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$.
Con esto concluimos el resultado principal, pues hemos probado que $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es un topos.

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Finalmente, ya teníamos que

$$[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \mathcal{P}(E)] \cong \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \times E)$$

para cada $E \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. En general para otro $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, por el lema anterior, $F = \mathrm{Colim}\, A$ donde $A : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ y $A_i \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$ para algún $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
De aquí que:
$\mathrm{Sub}(F \times E) = \mathrm{Sub}(\mathrm{Colim}((- \times E) \circ A)) = \mathrm{lím}\, \mathrm{Sub}((- \times E) \circ A)$
$= \mathrm{lím}(Sub(A_i \times E)) \cong \mathrm{lím}[A_i, \mathcal{P}(E)] = [\mathrm{Colim}\, A_i, \mathcal{P}(E)]$
$= [F, \mathcal{P}(E)]$.
Por lo tanto $\mathrm{Sub}(F \times E) \cong [F, \mathcal{P}(E)]$ para $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Es decir: $\mathrm{Sub}(- \times E)$ es representable en $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$.
Con esto concluimos el resultado principal, pues hemos probado que $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es un topos.

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Finalmente, ya teníamos que

$$[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \mathcal{P}(E)] \cong \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \times E)$$

para cada $E \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. En general para otro $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, por el lema anterior, $F = \mathrm{Colim}\, A$ donde $A : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ y $A_i \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$ para algún $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
De aquí que:
$\mathrm{Sub}(F \times E) = \mathrm{Sub}(\mathrm{Colim}((- \times E) \circ A)) = \mathrm{lím}\, \mathrm{Sub}((- \times E) \circ A)$
$= \mathrm{lím}(Sub(A_i \times E)) \cong \mathrm{lím}[A_i, \mathcal{P}(E)] = [\mathrm{Colim}\, A_i, \mathcal{P}(E)]$
$= [F, \mathcal{P}(E)]$.
Por lo tanto $\mathrm{Sub}(F \times E) \cong [F, \mathcal{P}(E)]$ para $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Es decir: $\mathrm{Sub}(- \times E)$ es representable en $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$.
Con esto concluimos el resultado principal, pues hemos probado que $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es un topos.

$[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Finalmente, ya teníamos que

$$[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \mathcal{P}(E)] \cong \mathrm{Sub}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \times E)$$

para cada $E \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. En general para otro $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, por el lema anterior, $F = \mathrm{Colim}\, A$ donde $A : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ y $A_i \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$ para algún $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
De aquí que:
$\mathrm{Sub}(F \times E) = \mathrm{Sub}(\mathrm{Colim}((- \times E) \circ A)) = \lim \mathrm{Sub}((- \times E) \circ A)$
$= \lim(Sub(A_i \times E)) \cong \lim[A_i, \mathcal{P}(E)] = [\mathrm{Colim}\, A_i, \mathcal{P}(E)]$
$= [F, \mathcal{P}(E)]$.
Por lo tanto $\mathrm{Sub}(F \times E) \cong [F, \mathcal{P}(E)]$ para $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Es decir: $\mathrm{Sub}(- \times E)$ es representable en $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$.
Con esto concluimos el resultado principal, pues hemos probado que $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ es un topos.

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Sección 4
Haces y Gavillas

Haces

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Considérese una colección de conjuntos ajenos entre sí $\mathcal{A} := \{A_i \mid i \in \mathcal{I}\}$.

Haces

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Considérese una colección de conjuntos ajenos entre sí $\mathcal{A} := \{A_i \mid i \in \mathcal{I}\}$. Esta colección induce una función *proyección* $p : A := \bigcup \mathcal{A} \to \mathcal{I} : x \in A_i \mapsto p(x) := i$.

Haces

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Considérese una colección de conjuntos ajenos entre sí $\mathcal{A} := \{A_i \mid i \in \mathcal{I}\}$. Esta colección induce una función *proyección* $p : A := \bigcup \mathcal{A} \to \mathcal{I} : x \in A_i \mapsto p(x) := i$. De esta manera, se dan las siguientes definiciones:

Definición (Tallos, gérmenes y haces)

Haces

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Considérese una colección de conjuntos ajenos entre sí $\mathcal{A} := \{A_i \mid i \in \mathcal{I}\}$. Esta colección induce una función *proyección* $p : A := \bigcup \mathcal{A} \to \mathcal{I} : x \in A_i \mapsto p(x) := i$. De esta manera, se dan las siguientes definiciones:

Definición (Tallos, gérmenes y haces)

- Cada uno de los $A_i = p^{-1}[\{i\}]$ con $i \in \mathcal{I}$ es llamado un *tallo* (stalk) o *fibra* (fibre) sobre i.

Haces

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Considérese una colección de conjuntos ajenos entre sí $\mathcal{A} := \{A_i \mid i \in \mathcal{I}\}$. Esta colección induce una función *proyección* $p : A := \bigcup \mathcal{A} \to \mathcal{I} : x \in A_i \mapsto p(x) := i$. De esta manera, se dan las siguientes definiciones:

Definición (Tallos, gérmenes y haces)

- Cada uno de los $A_i = p^{-1}[\{i\}]$ con $i \in \mathcal{I}$ es llamado un *tallo* (stalk) o *fibra* (fibre) sobre i.
- Decimos que x es un *germen* (germ) en i si y sólo si $x \in A_i$.

Haces

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Considérese una colección de conjuntos ajenos entre sí $\mathcal{A} := \{A_i \mid i \in \mathcal{I}\}$. Esta colección induce una función *proyección* $p : A := \bigcup \mathcal{A} \to \mathcal{I} : x \in A_i \mapsto p(x) := i$. De esta manera, se dan las siguientes definiciones:

Definición (Tallos, gérmenes y haces)

- Cada uno de los $A_i = p^{-1}[\{i\}]$ con $i \in \mathcal{I}$ es llamado un *tallo* (stalk) o *fibra* (fibre) sobre i.
- Decimos que x es un *germen* (germ) en i si y sólo si $x \in A_i$.
- A la colección $\mathcal{A}$ se le llama *manojo* o *haz* (bundle) de conjuntos sobre el espacio base $\mathcal{I}$.

Haces

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Considérese una colección de conjuntos ajenos entre sí $\mathcal{A} := \{A_i \mid i \in \mathcal{I}\}$. Esta colección induce una función *proyección* $p : A := \bigcup \mathcal{A} \to \mathcal{I} : x \in A_i \mapsto p(x) := i$. De esta manera, se dan las siguientes definiciones:

Definición (Tallos, gérmenes y haces)

- Cada uno de los $A_i = p^{-1}[\{i\}]$ con $i \in \mathcal{I}$ es llamado un *tallo* (stalk) o *fibra* (fibre) sobre i.
- Decimos que x es un *germen* (germ) en i si y sólo si $x \in A_i$.
- A la colección $\mathcal{A}$ se le llama *manojo* o *haz* (bundle) de conjuntos sobre el espacio base $\mathcal{I}$.
- El conjunto $A := \bigcup \mathcal{A}$ es conocido como *el espacio tallo* (stalk space/l'espace étale) del haz $\mathcal{A}$.

Haces

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

La idea detrás de los nombres recientemente dados está justificada con la siguiente imagen:

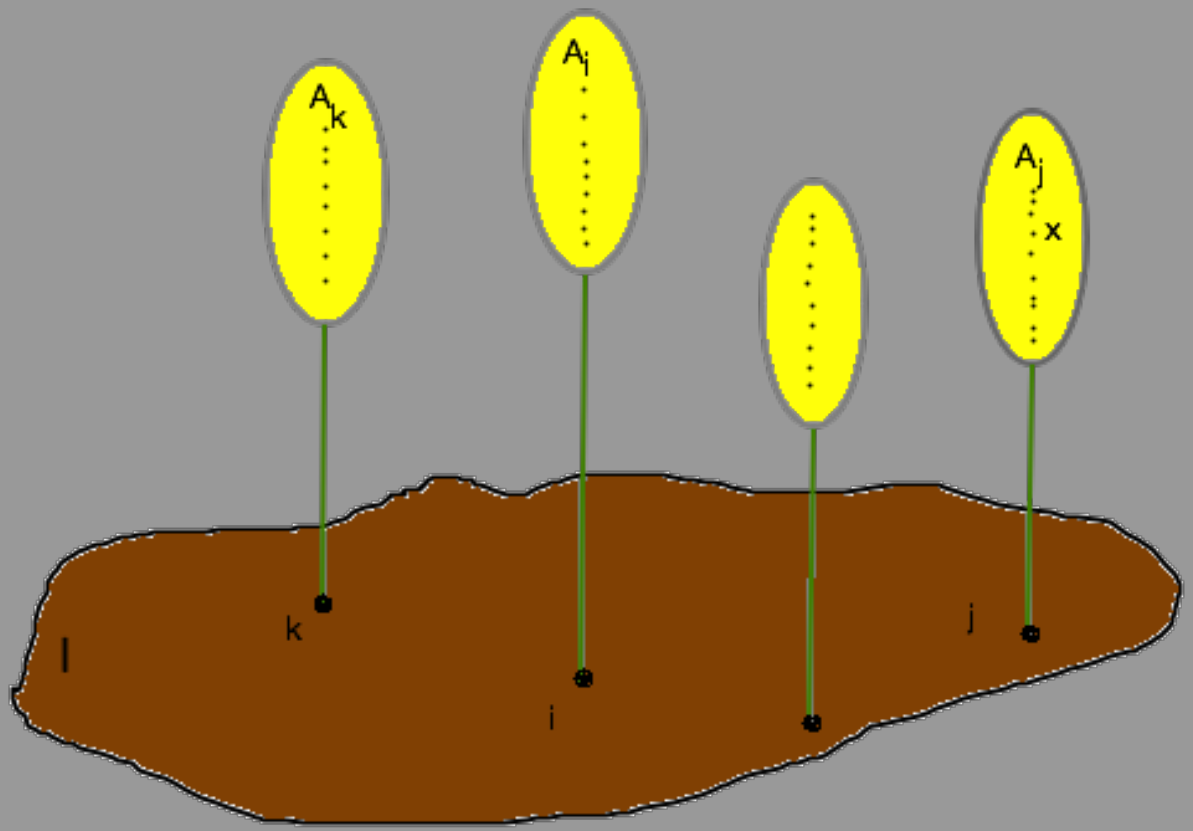
Haces

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

La idea detrás de los nombres recientemente dados está justificada con la siguiente imagen:



Haces

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Más aún, obsérvese que todo lo anterior se puede definir en términos de la función $p : A \to \mathcal{I}$

Haces

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Más aún, obsérvese que todo lo anterior se puede definir en términos de la función $p : A \to \mathcal{I}$ y, por ende, un haz de conjuntos sobre $\mathcal{I}$ no es más que una función con codominio $\mathcal{I}$.

Haces

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Más aún, obsérvese que todo lo anterior se puede definir en términos de la función $p : A \to \mathcal{I}$ y, por ende, un haz de conjuntos sobre $\mathcal{I}$ no es más que una función con codominio $\mathcal{I}$. De esta forma se puede definir la categoría de haces de conjuntos sobre $\mathcal{I}$, $\mathrm{Bn}(\mathcal{I})$ de la siguiente manera:

Haces

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Más aún, obsérvese que todo lo anterior se puede definir en términos de la función $p : A \to \mathcal{I}$ y, por ende, un haz de conjuntos sobre $\mathcal{I}$ no es más que una función con codominio $\mathcal{I}$. De esta forma se puede definir la categoría de haces de conjuntos sobre $\mathcal{I}$, $\mathrm{Bn}(\mathcal{I})$ de la siguiente manera:

- Los objetos de $\mathrm{Bn}(\mathcal{I})$ son las parejas $\langle A, f \rangle$ donde $f : A \to \mathcal{I}$.

Haces

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Más aún, obsérvese que todo lo anterior se puede definir en términos de la función $p : A \to \mathcal{I}$ y, por ende, un haz de conjuntos sobre $\mathcal{I}$ no es más que una función con codominio $\mathcal{I}$. De esta forma se puede definir la categoría de haces de conjuntos sobre $\mathcal{I}$, $\mathrm{Bn}(\mathcal{I})$ de la siguiente manera:

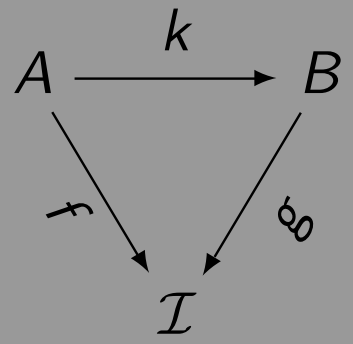
- Los objetos de $\mathrm{Bn}(\mathcal{I})$ son las parejas $\langle A, f \rangle$ donde $f : A \to \mathcal{I}$.
- $\mathrm{Bn}(\mathcal{I})[\langle A, f \rangle, \langle B, g \rangle] := \{k : A \to B \mid g \circ k = f\}$.

Haces

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Más aún, obsérvese que todo lo anterior se puede definir en términos de la función $p : A \to \mathcal{I}$ y, por ende, un haz de conjuntos sobre $\mathcal{I}$ no es más que una función con codominio $\mathcal{I}$. De esta forma se puede definir la categoría de haces de conjuntos sobre $\mathcal{I}$, $\mathrm{Bn}(\mathcal{I})$ de la siguiente manera:

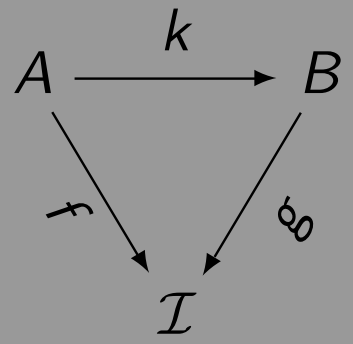
- Los objetos de $\mathrm{Bn}(\mathcal{I})$ son las parejas $\langle A, f \rangle$ donde $f : A \to \mathcal{I}$.
- $\mathrm{Bn}(\mathcal{I})[\langle A, f \rangle, \langle B, g \rangle] := \{k : A \to B \mid g \circ k = f\}$.



Haces

Más aún, obsérvese que todo lo anterior se puede definir en términos de la función $p : A \to \mathcal{I}$ y, por ende, un haz de conjuntos sobre $\mathcal{I}$ no es más que una función con codominio $\mathcal{I}$. De esta forma se puede definir la categoría de haces de conjuntos sobre $\mathcal{I}$, $\mathrm{Bn}(\mathcal{I})$ de la siguiente manera:

- Los objetos de $\mathrm{Bn}(\mathcal{I})$ son las parejas $\langle A, f \rangle$ donde $f : A \to \mathcal{I}$.
- $\mathrm{Bn}(\mathcal{I})[\langle A, f \rangle, \langle B, g \rangle] := \{k : A \to B \mid g \circ k = f\}$.



Observación: Los morfismos en $\mathrm{Bn}(\mathcal{I})$ mapean gérmenes sobre el índice i en gérmenes sobre el índice i.

Gavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Con lo anterior en mente damos la siguiente:

Gavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Con lo anterior en mente damos la siguiente:

Definición (Gavilla)

Dado un espacio topológico $\langle \mathcal{I}, \theta \rangle$, una gavilla de gérmenes sobre $\mathcal{I}$ es una pareja $\langle X, p \rangle$ con $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico y $p \in \mathrm{Top}[X, \mathcal{I}]$, un homeomorfismo local.[a]

[a] $\forall x \in X \exists U \in \tau, x \in U[p[U] \in \theta \wedge p \restriction U$ es homeomorfismo$]$.

Gavillas

Con lo anterior en mente damos la siguiente:

Definición (Gavilla)

Dado un espacio topológico $\langle \mathcal{I}, \theta \rangle$, una gavilla de gérmenes sobre $\mathcal{I}$ es una pareja $\langle X, p \rangle$ con $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico y $p \in \mathrm{Top}[X, \mathcal{I}]$, un homeomorfismo local.[a]

[a] $\forall x \in X \exists U \in \tau, x \in U[p[U] \in \theta \wedge p \restriction U$ es homeomorfismo$]$.

De manera similar a la diapositiva anterior:

Definición (Categoría de Gavillas de Gérmenes sobre $\mathcal{I}$)

Se define la categoría $\mathrm{Top}(\mathcal{I})$:

Gavillas

Con lo anterior en mente damos la siguiente:

Definición (Gavilla)

Dado un espacio topológico $\langle \mathcal{I}, \theta \rangle$, una gavilla de gérmenes sobre $\mathcal{I}$ es una pareja $\langle X, p \rangle$ con $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico y $p \in \mathrm{Top}[X, \mathcal{I}]$, un homeomorfismo local.[a]

[a] $\forall x \in X \exists U \in \tau, x \in U[p[U] \in \theta \wedge p \restriction U$ es homeomorfismo$]$.

De manera similar a la diapositiva anterior:

Definición (Categoría de Gavillas de Gérmenes sobre $\mathcal{I}$)

Se define la categoría $\mathrm{Top}(\mathcal{I})$:

- Los objetos de $\mathrm{Top}(\mathcal{I})$ son las gavillas $\langle A, p \rangle$ sobre $\mathcal{I}$.

Gavillas

Con lo anterior en mente damos la siguiente:

Definición (Gavilla)

Dado un espacio topológico $\langle \mathcal{I}, \theta \rangle$, una gavilla de gérmenes sobre $\mathcal{I}$ es una pareja $\langle X, p \rangle$ con $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico y $p \in \mathrm{Top}[X, \mathcal{I}]$, un homeomorfismo local.[a]

[a] $\forall x \in X \exists U \in \tau, x \in U[p[U] \in \theta \wedge p \restriction U$ es homeomorfismo$]$.

De manera similar a la diapositiva anterior:

Definición (Categoría de Gavillas de Gérmenes sobre $\mathcal{I}$)

Se define la categoría $\mathrm{Top}(\mathcal{I})$:

- Los objetos de $\mathrm{Top}(\mathcal{I})$ son las gavillas $\langle A, p \rangle$ sobre $\mathcal{I}$.
- $\mathrm{Top}(\mathcal{I})[\langle A, p \rangle, \langle B, q \rangle] := \{k \in \mathrm{Top}[A, B] \mid q \circ k = p\}$.

Pregavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Pregavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Gracias a Grothendieck la noción de gavilla fue generalizada a la de un functor entre dos categorías específicas.

Pregavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Gracias a Grothendieck la noción de gavilla fue generalizada a la de un functor entre dos categorías específicas. En lo restante de esta sección se verá esta definición y su relación con lo previamente definido:

Pregavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Gracias a Grothendieck la noción de gavilla fue generalizada a la de un functor entre dos categorías específicas. En lo restante de esta sección se verá esta definición y su relación con lo previamente definido:

Definición (Pregavilla)

Dado un espacio topológico $\langle \mathcal{I}, \theta \rangle$, considérese a la categoría $\theta(\mathcal{I})$ inducida por el *poset* $\langle \theta, \subseteq \rangle$ cuyos únicos morfismos son las inclusiones $U \hookrightarrow V$ con $U, V \in \theta$.

Pregavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Gracias a Grothendieck la noción de gavilla fue generalizada a la de un functor entre dos categorías específicas. En lo restante de esta sección se verá esta definición y su relación con lo previamente definido:

Definición (Pregavilla)

Dado un espacio topológico $\langle \mathcal{I}, \theta \rangle$, considérese a la categoría $\theta(\mathcal{I})$ inducida por el *poset* $\langle \theta, \subseteq \rangle$ cuyos únicos morfismos son las inclusiones $U \hookrightarrow V$ con $U, V \in \theta$.

- F es una *pregavilla o pila* sobre $\mathcal{I}$ si es un functor contravariante de $\theta(\mathcal{I})$ en Set, i.e. $F \in [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$.

Pregavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Gracias a Grothendieck la noción de gavilla fue generalizada a la de un functor entre dos categorías específicas. En lo restante de esta sección se verá esta definición y su relación con lo previamente definido:

Definición (Pregavilla)

Dado un espacio topológico $\langle \mathcal{I}, \theta \rangle$, considérese a la categoría $\theta(\mathcal{I})$ inducida por el *poset* $\langle \theta, \subseteq \rangle$ cuyos únicos morfismos son las inclusiones $U \hookrightarrow V$ con $U, V \in \theta$.

- F es una *pregavilla o pila* sobre $\mathcal{I}$ si es un functor contravariante de $\theta(\mathcal{I})$ en Set, i.e. $F \in [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$.
- La categoría $\mathrm{Psh}(\mathcal{I}) := [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$ es llamada *categoría de pregavillas sobre* $\mathcal{I}$.

Pregavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

En otras palabras, una pregavilla o pila $F \in [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$ asigna a cada abierto $A \in \theta$ un conjunto $F(A)$ y a cada inclusión $A \hookrightarrow B$, una función $F^B_A : F(B) \to F(A)$.

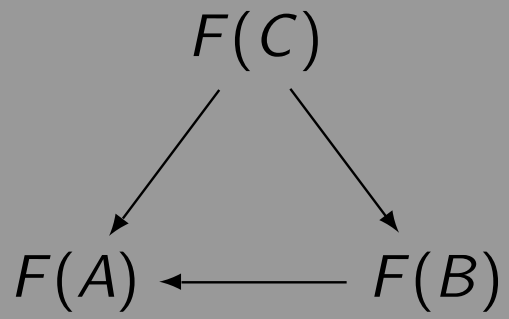
Pregavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

En otras palabras, una pregavilla o pila $F \in [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$ asigna a cada abierto $A \in \theta$ un conjunto $F(A)$ y a cada inclusión $A \hookrightarrow B$, una función $F_A^B : F(B) \to F(A)$. Obsérvese que si $A \subseteq B \subseteq C \in \theta$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

Pregavillas

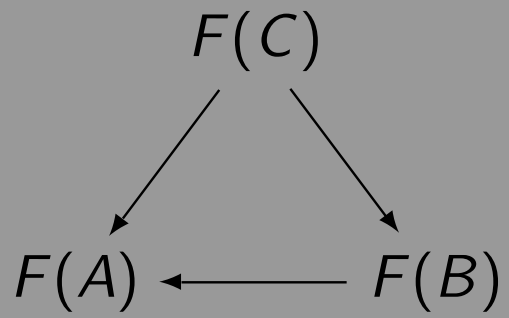
En otras palabras, una pregavilla o pila $F \in [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$ asigna a cada abierto $A \in \theta$ un conjunto $F(A)$ y a cada inclusión $A \hookrightarrow B$, una función $F^B_A : F(B) \to F(A)$. Obsérvese que si $A \subseteq B \subseteq C \in \theta$, entonces el siguiente diagrama conmuta:



Pregavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

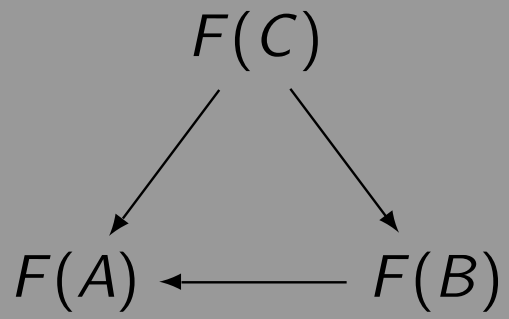
En otras palabras, una pregavilla o pila $F \in [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$ asigna a cada abierto $A \in \theta$ un conjunto $F(A)$ y a cada inclusión $A \hookrightarrow B$, una función $F_A^B : F(B) \to F(A)$. Obsérvese que si $A \subseteq B \subseteq C \in \theta$, entonces el siguiente diagrama conmuta:



Con base en esto, dada una gavilla de gérmenes sobre $\mathcal{I}$, i.e. $\langle A, f \rangle \in \mathrm{Top}(\mathcal{I})$, defínase la pila F_f tal que:

Pregavillas

En otras palabras, una pregavilla o pila $F \in [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$ asigna a cada abierto $A \in \theta$ un conjunto $F(A)$ y a cada inclusión $A \hookrightarrow B$, una función $F^B_A : F(B) \to F(A)$. Obsérvese que si $A \subseteq B \subseteq C \in \theta$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

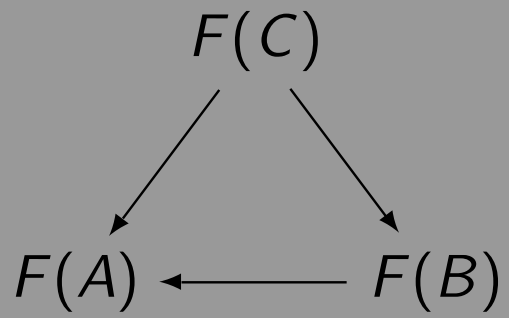


Con base en esto, dada una gavilla de gérmenes sobre $\mathcal{I}$, i.e. $\langle A, f \rangle \in \mathrm{Top}(\mathcal{I})$, defínase la pila F_f tal que:

- $F_f(V) := \{s \in \mathrm{Top}[V, A] \mid f \circ s = V \hookrightarrow A = 1_V\}$

Pregavillas

En otras palabras, una pregavilla o pila $F \in [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$ asigna a cada abierto $A \in \theta$ un conjunto $F(A)$ y a cada inclusión $A \hookrightarrow B$, una función $F_A^B : F(B) \to F(A)$. Obsérvese que si $A \subseteq B \subseteq C \in \theta$, entonces el siguiente diagrama conmuta:



Con base en esto, dada una gavilla de gérmenes sobre $\mathcal{I}$, i.e. $\langle A, f \rangle \in \mathrm{Top}(\mathcal{I})$, defínase la pila F_f tal que:

- $F_f(V) := \{s \in \mathrm{Top}[V, A] \mid f \circ s = V \hookrightarrow A = 1_V\}$
- En morfismos F_f asigna a cada inclusión $U \hookrightarrow V$, la función F_{fU}^V, que a cada sección "local" de f $(s \in F_f(V))$ le asigna su restricción en U $(F_{fU}^V(s) = s \restriction U)$.

Pregavillas

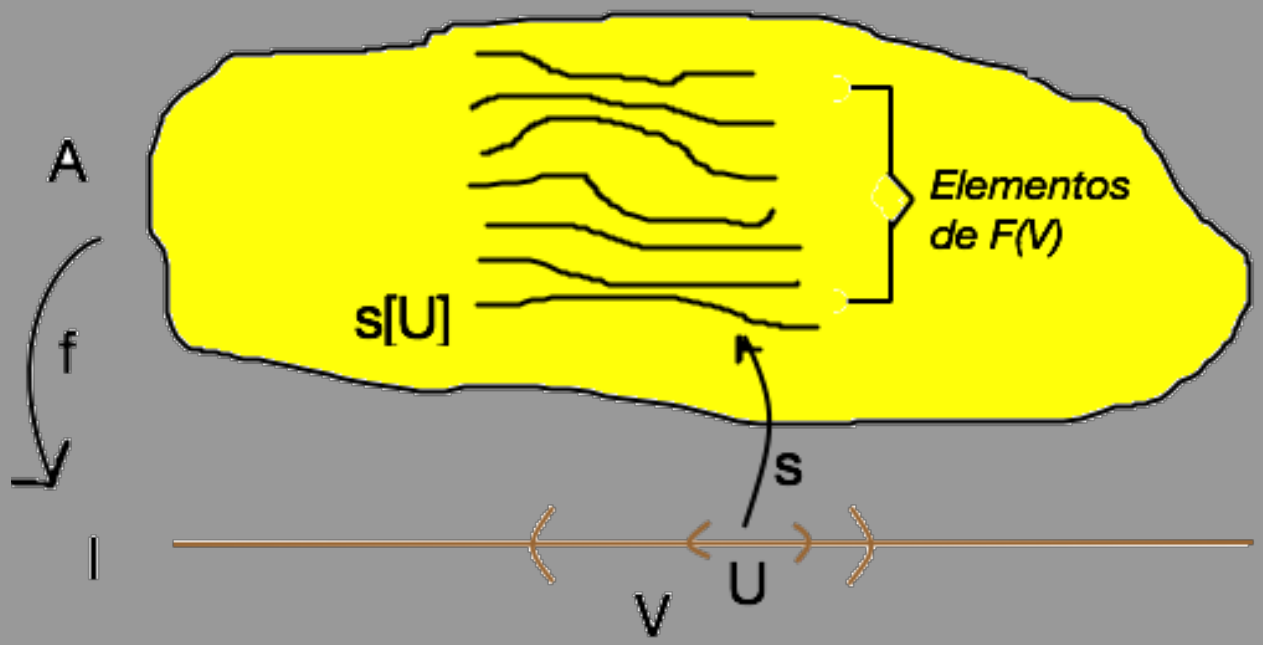
Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Así, identificando a las secciones de $F_f(V)$ con sus imágenes directas, se genera la siguiente imagen mental que justifica la elección del nombre de *pilas* para los funtores recientemente descritos:

Pregavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Así, identificando a las secciones de $F_f(V)$ con sus imágenes directas, se genera la siguiente imagen mental que justifica la elección del nombre de *pilas* para los funtores recientemente descritos:



Pregavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Pregavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Observando esta relación entre las gavillas y las pilas, uno podría buscar la condición necesaria para obtener pilas $F \in [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$ isomorfas a una pila inducida por la gavilla $f : A \to \mathcal{I}$ y,

Pregavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Observando esta relación entre las gavillas y las pilas, uno podría buscar la condición necesaria para obtener pilas $F \in [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$ isomorfas a una pila inducida por la gavilla $f : A \to \mathcal{I}$ y, al igual que como se hizo con el lema de Yoneda, tratar a las $F \cong F_f$ como gavillas "generalizadas"

Pregavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Observando esta relación entre las gavillas y las pilas, uno podría buscar la condición necesaria para obtener pilas $F \in [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$ isomorfas a una pila inducida por la gavilla $f : A \to \mathcal{I}$ y, al igual que como se hizo con el lema de Yoneda, tratar a las $F \cong F_f$ como gavillas "generalizadas" (que es lo que se hace en la actualidad).

Pregavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Observando esta relación entre las gavillas y las pilas, uno podría buscar la condición necesaria para obtener pilas $F \in [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$ isomorfas a una pila inducida por la gavilla $f : A \to \mathcal{I}$ y, al igual que como se hizo con el lema de Yoneda, tratar a las $F \cong F_f$ como gavillas "generalizadas" (que es lo que se hace en la actualidad). Esta es la razón por la cual las pilas son llamadas modernamente "pregavillas".

Pregavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Observando esta relación entre las gavillas y las pilas, uno podría buscar la condición necesaria para obtener pilas $F \in [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$ isomorfas a una pila inducida por la gavilla $f : A \to \mathcal{I}$ y, al igual que como se hizo con el lema de Yoneda, tratar a las $F \cong F_f$ como gavillas "generalizadas" (que es lo que se hace en la actualidad). Esta es la razón por la cual las pilas son llamadas modernamente "pregavillas".
La condición *de localidad* en cuestión para lograr esto es que:

Dado cualquier abierto $V \in \theta$, una cubierta abierta del mismo $\{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ con $V = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$, y cualquier elección de secciones "locales" compatibles, i.e. $\{s_\alpha \in F(V_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ con $s_\alpha \restriction V_\alpha \cap V_\beta = s_\beta \restriction V_\alpha \cap V_\beta$, existe una única sección $s \in F(V)$ tal que $s \restriction V_\alpha = s_\alpha$ para cada $\alpha \in I$.

Gavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Categoría de Gavillas sobre $\mathcal{I}$ (generalización))

Así, definimos a la categoría de gavillas sobre $\mathcal{I}$ como la subcategoría $\mathrm{Sh}(\mathcal{I}) \hookrightarrow [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$ cuyos objetos son los functores $F \in [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$ que cumplen la *condición de localidad*[a] dada en la diapositiva anterior.

[a] $\forall V \in \theta \forall \{V_\alpha \mid \alpha \in I\}, V = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \forall \{s_\alpha \in F(V_\alpha) \mid \alpha \in I\} [\forall \alpha, \beta \in I (F^{V_\alpha}_{V_\alpha \cap V_\beta}(s_\beta) = F^{V_\beta}_{V_\alpha \cap V_\beta}(s_\alpha)) \Rightarrow \exists! s \in F(V) \forall \alpha \in I (F^{V}_{V_\alpha}(s) = s_\alpha)]$

Ejemplo

Gavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Definición (Categoría de Gavillas sobre $\mathcal{I}$ (generalización))

Así, definimos a la categoría de gavillas sobre $\mathcal{I}$ como la subcategoría $\mathrm{Sh}(\mathcal{I}) \hookrightarrow [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$ cuyos objetos son los functores $F \in [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$ que cumplen la *condición de localidad*[a] dada en la diapositiva anterior.

[a] $\forall V \in \theta \forall \{V_\alpha \mid \alpha \in I\}, V = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \forall \{s_\alpha \in F(V_\alpha) \mid \alpha \in I\}[\forall \alpha, \beta \in I(F^{V_\alpha}_{V_\alpha \cap V_\beta}(s_\beta) = F^{V_\beta}_{V_\alpha \cap V_\beta}(s_\alpha)) \Rightarrow \exists! s \in F(V) \forall \alpha \in I(F^{V}_{V_\alpha}(s) = s_\alpha)]$

Ejemplo

- Considérese a la pila constante $K : \theta(\mathcal{I}) \to \mathrm{Set} : U \mapsto \{\emptyset\}$. Dada una cubierta abierta de U, $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ y una familia de secciones $\{s_\alpha \in K(U_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ se tiene que para cada $\alpha \in I$, $s_\alpha = \emptyset$, trivialmente existe una única sección $\emptyset \in K(U)$ talque $K^U_{U_\alpha}(\emptyset) = \emptyset = s_\alpha$ para $\alpha \in I$.

Toposes y algunas propiedades

Jonathan Julián Huerta y Munive

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables

Topos
Objetos Potencia

Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set

Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Ejemplo

Gavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Ejemplo

1. Sea $F \in \mathrm{Sh}(\mathcal{I})$ una gavilla, entonces $\emptyset = \{U_\alpha \mid \alpha \in \emptyset\}$ es una cubierta abierta de $\emptyset \in \theta$.

Gavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Ejemplo

1. Sea $F \in \mathrm{Sh}(\mathcal{I})$ una gavilla, entonces $\emptyset = \{U_\alpha \mid \alpha \in \emptyset\}$ es una cubierta abierta de $\emptyset \in \theta$. De aquí que para cualquier colección de secciones compatibles indizadas por $\emptyset$, debe existir un único elemento $s \in F(\emptyset)$ que además cumple vacuamente que si $\alpha \in \emptyset$, entonces $F^{\emptyset}_{U_\alpha}(s) = s_\alpha$.

Gavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Ejemplo

1. Sea $F \in \mathrm{Sh}(\mathcal{I})$ una gavilla, entonces $\emptyset = \{U_\alpha \mid \alpha \in \emptyset\}$ es una cubierta abierta de $\emptyset \in \theta$. De aquí que para cualquier colección de secciones compatibles indizadas por $\emptyset$, debe existir un único elemento $s \in F(\emptyset)$ que además cumple vacuamente que si $\alpha \in \emptyset$, entonces $F^{\emptyset}_{U_\alpha}(s) = s_\alpha$. Es decir, existe un único elemento $s \in F(\emptyset)$.

Gavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Ejemplo

1. Sea $F \in \mathrm{Sh}(\mathcal{I})$ una gavilla, entonces $\emptyset = \{U_\alpha \mid \alpha \in \emptyset\}$ es una cubierta abierta de $\emptyset \in \theta$. De aquí que para cualquier colección de secciones compatibles indizadas por $\emptyset$, debe existir un único elemento $s \in F(\emptyset)$ que además cumple vacuamente que si $\alpha \in \emptyset$, entonces $F^{\emptyset}_{U_\alpha}(s) = s_\alpha$. Es decir, existe un único elemento $s \in F(\emptyset)$.
2. Para el espacio topológico $\langle Y, \eta \rangle$, defínase la gavilla de funciones continuas $C : \theta(\mathcal{I})^{op} \to \mathrm{Set}$ por:

Gavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Ejemplo

1. Sea $F \in \mathrm{Sh}(\mathcal{I})$ una gavilla, entonces $\emptyset = \{U_\alpha \mid \alpha \in \emptyset\}$ es una cubierta abierta de $\emptyset \in \theta$. De aquí que para cualquier colección de secciones compatibles indizadas por $\emptyset$, debe existir un único elemento $s \in F(\emptyset)$ que además cumple vacuamente que si $\alpha \in \emptyset$, entonces $F^{\emptyset}_{U_\alpha}(s) = s_\alpha$. Es decir, existe un único elemento $s \in F(\emptyset)$.
2. Para el espacio topológico $\langle Y, \eta \rangle$, defínase la gavilla de funciones continuas $C : \theta(\mathcal{I})^{op} \to \mathrm{Set}$ por:
   - En objetos: Si $U \in \theta$, entonces $C(U) := \{f : U \to Y \mid f \text{ es continua}\}$.

Gavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Ejemplo

1. Sea $F \in \mathrm{Sh}(\mathcal{I})$ una gavilla, entonces $\emptyset = \{U_\alpha \mid \alpha \in \emptyset\}$ es una cubierta abierta de $\emptyset \in \theta$. De aquí que para cualquier colección de secciones compatibles indizadas por $\emptyset$, debe existir un único elemento $s \in F(\emptyset)$ que además cumple vacuamente que si $\alpha \in \emptyset$, entonces $F^{\emptyset}_{U_\alpha}(s) = s_\alpha$. Es decir, existe un único elemento $s \in F(\emptyset)$.
2. Para el espacio topológico $\langle Y, \eta \rangle$, defínase la gavilla de funciones continuas $C : \theta(\mathcal{I})^{op} \to \mathrm{Set}$ por:
   - En objetos: Si $U \in \theta$, entonces $C(U) := \{f : U \to Y \mid f \text{ es continua}\}$.
   - En morfismos: Para $U \hookrightarrow V$, $C^V_U(f) := f \restriction U$.

Gavillas

Recordatorios
Subobjetos
Lema de Yoneda y Functores Representables
Topos
Objetos Potencia
Categoría de Functores como un Topos
Functor Evaluación
Functores de Opuesta en Set
Haces y Gavillas
Haces
Gavillas de gérmenes
Pregavillas (functores)

Ejemplo

1. Sea $F \in \mathrm{Sh}(\mathcal{I})$ una gavilla, entonces $\emptyset = \{U_\alpha \mid \alpha \in \emptyset\}$ es una cubierta abierta de $\emptyset \in \theta$. De aquí que para cualquier colección de secciones compatibles indizadas por $\emptyset$, debe existir un único elemento $s \in F(\emptyset)$ que además cumple vacuamente que si $\alpha \in \emptyset$, entonces $F^{\emptyset}_{U_\alpha}(s) = s_\alpha$. Es decir, existe un único elemento $s \in F(\emptyset)$.
2. Para el espacio topológico $\langle Y, \eta \rangle$, defínase la gavilla de funciones continuas $C : \theta(\mathcal{I})^{op} \to \mathrm{Set}$ por:
   - En objetos: Si $U \in \theta$, entonces $C(U) := \{f : U \to Y \mid f \text{ es continua}\}$.
   - En morfismos: Para $U \hookrightarrow V$, $C^V_U(f) := f \restriction U$.
3. Con la misma idea se puede definir la gavilla de funciones acotadas $B \in [\theta(\mathcal{I})^{op}, \mathrm{Set}]$ cambiando Y por $\mathbb{R}$.